Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 7. Juni 2016, vor den Übungen

1. Bestimme alle Lösungen der Kongruenz $P(x) \equiv 0 \bmod 60$ mit
$$P(x) = 23x^3 + 6x^2 + 5x + 2$$
von Übungsblatt 6. (4 Punkte)

2. (a) Berechne $101^{600} \bmod 2016$.
   (b) Besitzt $87^{(87^{87})}$ dieselbe Einerziffer wie $\left(87^{87}\right)^{87}$? (6 Punkte)

3. Zeige: $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$ für $p \in \mathbb{P}$.

   Hinweis:
   Betrachte für $p > 3$ die $p-3$ Zahlen $2, 3, \ldots, p-3, p-2$. (4 Punkte)

4. Es sei $d \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Mengen $M(d) := \{n \in \mathbb{N} \colon n | (k^d - k) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}$.
   (a) Zeige $M(1) = \mathbb{N}$ und $M(2) = \{1, 2\}$.
   (b) Bestimme $M(5)$.
   (c) Zeige, dass die Untersuchung für beliebiges d auf alle $k \geq 2$ beschränkt werden kann.
   (d) Beweise, dass $2 \in M(d)$ für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt.
   (e) Zeige, dass $\mu(n) \neq 0$ für alle $n \in M(d)$ mit $d > 1$ gilt, wobei μ die Möbiusfunktion darstellt.
   (f) Bestimme $\max M(109)$.
   (g) Warum ist $\max M(112)$ deutlich kleiner als das Ergebnis von Teilaufgabe f)? (10 Punkte)