# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 14. Juni 2016, vor den Übungen

1. Bestimme alle vierstelligen Quadratzahlen, bei denen die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern gleich sind. (4 Punkte)

2. Auf der "Arithmetik an der A7" im Januar 2014 in Hannover wurde folgendes Problem diskutiert: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und
$$n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot 10^{k-j}$$
und schreiben $(n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ als Folge der Ziffern und notieren $(x) \triangleleft (y)$ für den Fall, dass die Folge $(x)$ eine Teilfolge von $(y)$ ist. Es sei $M$ eine Menge mit $M \subset \mathbb{N}$.
Wir definieren die Menge $\mathcal{S}(M) = \{m \in M \colon \{n \in M,\ n < m \colon (n) \triangleleft (m)\} = \emptyset\}$.
Im folgenden betrachten wir die Menge der Primzahlen, also $M = \mathbb{P}$.

   (a) Bestimme alle Elemente $p \in \mathcal{S}(\mathbb{P})$ mit $p \leq 20$.

   (b) In welchen Restklassen modulo 10 liegen alle Elemente $p \in \mathcal{S}(\mathbb{P})$ mit $p \geq 10$?

   (c) Bestimme alle Elemente $p \in \mathcal{S}(\mathbb{P})$ mit $p \equiv 1 \bmod 10$.

   *Hinweis:*
   Im Januar 2012 und im Juli 2015 fand die "Arithmetik an der A7" in Ulm statt. (8 Punkte)

3. Es sei $2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ die Folge der Primzahlen.

   (a) Zeige: $p_{n+1} \leq p_1 \cdots p_n + 1$.

   (b) Folgere $p_n < 2^{2^n}$ aus dem Ergebnis von Teilaufgabe a).

   (c) Es sei $x \geq 3$. Folgere $\pi(x) \geq \log\log x - 1$ aus Teilaufgabe b).

   (d) Zeige, dass es beliebig lange Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen gibt.

   (5 Punkte)

4. Zeige:

   (a) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \equiv 2 \bmod 3$.

   (b) Es gibt unendlich viele Primzahlen, deren Darstellung im gewöhnlichen Dezimalsystem nicht auf die Ziffer 1 endet. (5 Punkte)

5. Beweise oder widerlege:
Aus jeder natürlichen Zahl kann man durch Ändern einer einzigen Dezimalstelle eine Primzahl machen. (2 Punkte)