Skript zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

Sommersemester 2013

Prof. Dr. Helmut Maier
Dr. Daniel Haase
Dipl.-Math. Hans- Peter Reck

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie
Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Charaktere und Gleichverteilung auf Gruppen

1.1 Gruppen und ihre Charaktere

Durch die analytische Zahlentheorie zieht sich wie ein roter Faden die Idee der Gleichverteilung von Folgen auf Gruppen und das Studium der Gleichverteilung durch Charaktere dieser Gruppen.

Definition 1.1.1. Es seien $(G, \circ)$ und $(H, \star)$ Gruppen mit den Verknüpfungen $\circ$ und $\star$. Eine Abbildung $\Phi\colon G \to H$ heißt Gruppenhomomorphismus, falls

$$\Phi(g_1 \circ g_2) = \Phi(g_1) \star \Phi(g_2)$$

für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt (Relationstreue).
In dieser Vorlesung wird die Gruppe G stets abelsch und H stets $H = \mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ mit der Multiplikation sein. Ist die Gruppe G endlich, so versteht man unter einem Charakter χ von G einen Homomorphismus $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$. Auch für unendliche Gruppen G kann der Begriff des Charakters definiert werden, falls die Gruppe G eine topologische Gruppe ist. Ein Charakter χ von G ist dann ein stetiger Homomorphismus $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$.

Wir werden den Begriff der topologischen Gruppe in dieser Vorlesung nicht benötigen, da wir nur wenige Beispiele von unendlichen Gruppen betrachten. In jedem Fall wird klar sein, was unter Stetigkeit zu verstehen ist.

Satz 1.1.1. *Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe. Für jeden Charakter χ von G und für alle $g \in G$ ist dann $\chi(g)$ eine $|G|$- te Einheitswurzel. Insbesondere gibt es nur endlich viele Charaktere von G.*

Definition 1.1.2. Es sei $e(\alpha) := e^{2\pi i\alpha}$.

Wir schließen diesen ersten Abschnitt mit einer Liste der Beispiele, mit der wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen werden:

Beispiel 1.1.1. (i) Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ die Gruppe der Restklassen modulo q mit der Addition als Verknüpfung. Für $m \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ ergeben sich die Charaktere

$$e_{m,q}\colon \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*,\ r \bmod q \to e\left(\frac{mr}{q}\right).$$

(ii) Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$ die Gruppe der zu q teilerfremden Restklassen modulo q bzgl. der Multiplikation. Die Charaktere von $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$ heißen Dirichletcharaktere modulo q. Ihre Konstruktion ist komplizierter. Wir geben ein Beispiel: Es sei q eine Primzahl. Zu einem Primzahlmodul existiert immer eine Primitivwurzel, so besitzt etwa $q = 7$ die Primitivwurzel $r = 3$. Es ist $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \cdot)^*$ die zyklische Gruppe

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \cdot)^* = \left\{3^0 \bmod 7, 3^1 \bmod 7, \dots, 3^6 \bmod 7\right\}.$$

Ein Dirichletcharakter χ kann nun dadurch definiert werden, indem man für $\chi(3)$ eine beliebige sechste Einheitswurzel wählt: wir setzen $\chi_m(3) = e\left(\frac{m}{6}\right)$. Wegen der Relationstreue ist χ_m vollständig durch $\chi_m(3^k) = e\left(\frac{km}{6}\right)$ bestimmt.

Nun zu unendlichen Gruppen:

(iii) Es sei $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ hat eine Darstellung $z = e(\alpha)$, wobei α durch die Forderung $\alpha \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt ist. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$e_n \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ e(\alpha) \to e(n\alpha)$$

ein Charakter von G. Die Forderung der Stetigkeit ist offenbar erfüllt.

(iv) Es sei $G = (\mathbb{R}, +)$. Für $\nu \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$e_\nu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*,\ t \to e(\nu t)$$

ein Charakter.

Wir werden (zum Teil in Übungsaufgaben) zeigen, dass wir in den Beispielen stets sämtliche Charaktere der jeweiligen Gruppen beschrieben haben.

1.2 Gruppe der Charaktere, Orthogonalitätsrelation

Bis auf weiteres sei nun $(G, \cdot)$ mit $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine endliche abelsche Gruppe mit neutralem Element e.

Definition 1.2.1. Es sei $\hat{G}$ die Menge aller Charaktere von G. Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ zwei Charaktere von G. Dann definieren wir das Produkt $\chi_1 \cdot \chi_2$ durch $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)$ für alle $g \in G$. Man sieht unmittelbar, dass $\chi_1 \cdot \chi_2$ wieder ein Charakter ist.

Satz 1.2.1. *Es ist $\hat{G}$ eine endliche Gruppe bzgl. der Multiplikation von Charakteren.*

Beweis. Der Charakter $\chi_0 \colon G \to \mathbb{C}^*$, $g \to 1$ ist offenbar ein neutrales Element der Multiplikation. Das Inverse zum Charakter $\chi \in \hat{G}$ ist der konjugiert komplexe Charakter $\overline{\chi} \colon G \to \mathbb{C}^*,\ g \to \overline{\chi(g)}$, da $\chi(g) \circ \overline{\chi(g)} = |\chi(g)| = 1$ für alle $g \in G$ ist. □

Definition 1.2.2. Das neutrale Element χ_0 der Gruppe $\hat{G}$ heißt der triviale Charakter von G. Bei Dirichletcharakteren, im Fall ($G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$), spricht man auch vom Hauptcharakter. Ein $\chi \in \hat{G}$ mit $\chi \neq \chi_0$ heißt auch nichttrivialer Charakter.

Wir wollen nun die Anzahl der Charaktere $|\hat{G}|$ bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst

Lemma 1.2.1. *Für $g \in G - \{e\}$ gibt es stets ein $\chi \in \hat{G}$ mit $\chi(g) \neq 1$.*

Beweis. Es sei $U = \langle g \rangle$ die von g erzeugte zyklische Untergruppe von G, also $U = \{e, g, \ldots, g^{m-1}\}$, somit $|U| = m$. Es sei $G = U \cdot h_1 \dot\cup U \cdot h_2 \dot\cup \ldots \dot\cup U \cdot h_l$ die Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen der Untergruppe U. Dann hat jedes $l \in G$ eine eindeutige Darstellung $l = g^s \cdot h_t$. Wir definieren dann den Charakter χ durch $\chi(l) = e\left(\frac{s}{m}\right)$. Man sieht dann leicht, dass χ ein Charakter der Gruppe G ist. Es ist $\chi(g) = e\left(\frac{1}{m}\right) \neq 1$. □

Satz 1.2.2. *(i) Für $\chi \in \hat{G}$ ist*

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \textit{falls} \quad \chi = \chi_0 \\ 0, & \textit{falls} \quad \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

(ii) Für $g \in G$ ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |\hat{G}|, & \textit{falls} \quad g = e \\ 0, & \textit{falls} \quad g \neq e. \end{cases}$$

Beweis. (i) Der Fall $\chi = \chi_0$ ist klar.
Falls $\chi \neq \chi_0$ ist, gibt es ein $g_\chi \in G$ mit $\chi(g_\chi) \neq 1$. Mit g durchläuft auch $g_\chi \cdot g$ alle Elemente von G. Damit ist

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_\chi \cdot g) = \chi(g_\chi) \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Wegen $\chi(g_\chi) \neq 1$ folgt $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$.

(ii) Der Fall $g = e$ ist klar.
Ist $g \neq e$, so gibt es nach Lemma 1.2.1 ein $\chi_g \in \hat{G}$ mit $\chi_g(g) \neq 1$. Mit dem Charakter χ durchläuft nun auch $\chi_g \cdot \chi$ alle Elemente von $\hat{G}$. Damit ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} (\chi_g \cdot \chi)(g) = \chi_g(g) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g).$$

Wegen $\chi_g(g) \neq 1$ folgt $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = 0$.

□

Satz 1.2.3. *Es ist $|G| = |\hat{G}|$.*

Beweis. Es ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi_0(g) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Nach Satz 1.2.2 (i) verschwindet die Doppelsumme. Also ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) = |G|. \tag{1}$$

Weiter ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(e) + \sum_{g \neq e} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g).$$

Nach Satz 1.2.2 (ii) verschwindet auch diese Doppelsumme. Also ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) = |\hat{G}| \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. □

Definition 1.2.3. Es sei $F(G,\mathbb{C}) = \{f\colon G \to \mathbb{C}\}$ der Vektorraum über $\mathbb{C}$ aller Funktionen vom Grad n. Wir definieren E_k für $1 \le k \le n$ durch

$$E_k(g) := \begin{cases} 1, & \text{für} \quad g = g_k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und nennen $B := \{E_1, \ldots, E_n\}$ die "Standardbasis" von $F(G,\mathbb{C})$. Wir definieren auf $F(G,\mathbb{C})$ durch

$$\langle f, h\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{h(g)}$$

für alle $f, h \in F(G,\mathbb{C})$ ein inneres Produkt.

Satz 1.2.4. *Es ist* $\dim F(G,\mathbb{C}) = n$ *und* $f = \sum_{k=1}^{n} f(g_k)E_k$.
Mit dem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist* $F(G,\mathbb{C})$ *ein unitärer Vektorraum.*

Beweis. Man sieht unmittelbar, dass für $f\tilde{f} = \sum_{k=1}^{n} c_k E_k$ dann $\overline{f}(g_k) = c_k$ gilt.
Damit ist klar, dass die obige Form die einzige Darstellung von f als Linearkombination der E_k ist.
Also ist B eine Basis und $\dim(F(G,\mathbb{C})) = n$.
Die Eigenschaften eines inneren Produkts werden leicht nachgeprüft. □

Aus Satz 1.2.2 (i) folgt nun leicht, dass $\hat{G}$ eine Orthonormalbasis von $F(G,\mathbb{C})$ ist.

Satz 1.2.5. *(i) (Orthogonalitätsrelation 1. Art:)*
Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$. *Dann ist*

$$\langle \chi_1, \chi_2\rangle = \begin{cases} 1, & \textit{falls} \quad \chi_1 = \chi_2 \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

das heißt

$$\sum_{g\in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \begin{cases} |G|, & \textit{falls} \quad \chi_1 = \chi_2 \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(ii) (Orthogonalitätsrelation 2. Art:)
Es seien $g_1, g_2 \in G$. *Dann ist*

$$\sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(g_1)\overline{\chi(g_2)} = \begin{cases} |G|, & \textit{falls} \quad g_1 = g_2 \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. (i) Wir wenden Satz 1.2.2 (i) für den Charakter $\chi = \chi_1\overline{\chi_2}$ an. Es ist genau dann $\chi = \chi_0$, wenn $\chi_1 = \chi_2$ ist.

(ii) Nun wenden wir Satz 1.2.2 (ii) für $g = g_1 g_2^{-1}$ an.

□

Bemerkung 1.2.1. Der Teil (ii) von Satz 1.2.5 kann aus Teil (i) erhalten werden, wenn in Teil (i) die Gruppe G durch die Gruppe $\hat{G}$ ersetzt wird und man beachtet, dass $\hat{\hat{G}}$ mit G durch $g(\chi) := \chi(g)$ identifiziert werden kann.

Satz 1.2.5 besagt, dass $\hat{G}$ eine Orthonormalbasis (ONB) des Vektorraums $F(G,\mathbb{C})$ ist. Soweit ist es möglich, jedes $f \in F(G,\mathbb{C})$ als Linearkombination der χ auszudrücken:

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi \quad \text{oder} \quad f = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}(\chi_j)\chi_j, \tag{1}$$

falls $\hat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ ist.
Wie auf jedem unitären Vektorraum können die Koeffizienten bezüglich einer ONB durch Bildung des inneren Produkts erhalten werden. Dann folgt aus (1):

$$\langle f, \chi_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}(\chi_j)\,\langle \chi_j, \chi_k\rangle = \hat{f}(\chi_k).$$

Definition 1.2.4. Es sei $f \in F(G,\mathbb{C})$.
Für $\chi \in \hat{G}$ heißen die inneren Produkte $\langle f, \chi\rangle$ die (verallgemeinerten) Fourierkoeffizienten von f.
Die Summe $\sum\limits_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi$ heißt (verallgemeinerte) Fourierreihe von f.

Die obige Diskussion ergibt folgenden

Satz 1.2.6. *Es wird $f \in F(G,\mathbb{C})$ durch seine Fourierreihe dargestellt:*

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi.$$

Satz 1.2.7. *Für $f \in F(G,\mathbb{C})$ gilt die Parsevalsche Gleichung:*

$$\sum_{g\in G} |f(g)|^2 = \sum_{\chi\in\hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2.$$

Beweis. Es ist nach Satz 1.2.6:

$$\begin{aligned} \sum_{g\in G} |f(g)|^2 &= \langle f, f\rangle = \left\langle \sum_{\chi_1\in\hat{G}} \hat{f}(\chi_1)\chi_1, \sum_{\chi_2\in\hat{G}} \hat{f}(\chi_2)\chi_2 \right\rangle \\ &= \sum_{\chi_1,\chi_2\in\hat{G}} \hat{f}(\chi_1)\overline{\hat{f}(\chi_2)}\,\langle \chi_1, \chi_2\rangle \underset{\hat{G}\ \text{ONB}}{=} \sum_{\chi\in\hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2. \end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zu den unendlichen Gruppen in unseren Beispielen:

$$G = (\mathbb{C}^*, \cdot) \quad \text{mit} \quad \hat{G} = \{e_n \colon n \in \mathbb{Z}\},$$

wobei $e_n \colon e(\alpha) \to e(n\alpha)$.
Es stellt sich zunächst die Frage nach den Orthogonalitätsrelationen. Im Falle der endlichen abelschen Gruppen basieren diese auf Satz 1.2.2 (i):
Für $\chi \in \hat{G}$ ist

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{falls} \quad \chi = \chi_0 \\ 0, & \text{falls} \quad \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

Wir erhalten ein Analogon für den Fall $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, wenn wir die Summe durch ein Integral ersetzen:

$$\int_0^1 e(n\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad n = 0, \quad \text{d.h. } e_n \text{ trivialer Charakter} \\ 0, & \text{für} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Daraus ergeben sich leicht "Orthogonalitätsrelationen 1. Art":

$$\int_0^1 e(n_1\alpha)e(-n_2\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad n_1 = n_2 \\ 0, & \text{für} \quad n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

Das innere Produkt zweier Funktionen auf G sollte also als

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(\alpha)\overline{g(\alpha)}\, d\alpha$$

definiert werden. Es bleibt die Frage nach der Menge der Funktionen, die betrachtet werden. Will man mit dem Riemann- Integral auskommen, so muss man sich natürlich auf Riemann- integrierbare Funktionen beschränken. In der reellen Analysis, wo man das Lebesque- Integral zur Verfügung hat, wählt man den Vektorraum $L^2(\mathbb{C}^*)$, den Vektorraum der Lebesque- integrierbaren Funktionen f mit endlicher L^2- Norm:

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^2\, d\alpha < \infty.$$

Man erhält die klassische Theorie der Fourierreihe:
Es sei $f \in L^2(\mathbb{C}^*)$. Die Fourierreihe von f ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e(n\alpha)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(\alpha)e(-n\alpha)\, d\alpha.$$

Die Frage, ob f durch die Fourierreihe dargestellt wird, ist hier wesentlich komplizierter als bei endlichen Gruppen. Es gilt stets Konvergenz im quadratischen Mittel, d.h.

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| f(\alpha) - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e(n\alpha) \right|^2 d\alpha = 0.$$

Die punktweise Konvergenz kann jedoch nur unter starken Zusatzbedingungen, nämlich stetige Differenzierbarkeit, garantiert werden. Es gibt Beispiele für nur stetige Funktionen, bei denen sie nicht gilt.
Die "Orthogonalitätsrelationen 2. Art" sind:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{-N<n\leq N} e(n(\alpha_1 - \alpha_2)) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \alpha_1 = \alpha_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $G = (\mathbb{R}, +)$ mit $\hat{G} = \{e_\nu \colon \nu \in \mathbb{R}\}$, wobei $e_\nu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $t \to e(\nu t)$.
Die "Orthogonalitätsrelationen 1. Art" sind hier:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e_{\nu_1}(t)\overline{e_{\nu_2}(t)}\, dt = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \nu_1 = \nu_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

An die Stelle der Fourierreihe tritt das Fourierintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e(xt)\,dt$$

mit der Fouriertransformierten

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)e(-\nu t)\,d\nu.$$

1.3 Gleichverteilung auf Gruppen

Definition 1.3.1. Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe, $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $g_n \in G$ eine Folge von Gruppenelementen. Für $g \in G$ und $x > 0$ sei

$$N(x, g) = |\{n \le x : g_n = g\}|\,.$$

Die Folge (g_n) heißt gleichverteilt auf G, falls für alle $g \in G$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x, g) = |G|^{-1}$$

gilt, d.h. die Folge (g_n) nimmt jeden möglichen Wert asymptotisch gleich oft an.

Eine Grundidee der analytischen Zahlentheorie ist, die Gleichverteilung von Folgen auf Gruppen zur Größe von Charaktersummen in Beziehung zu setzen.

Satz 1.3.1. *Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit Charaktergruppe $\hat{G}$, dessen neutrales Element der triviale Charakter χ_0 ist. Es sei $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Elementen von G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Folge (g_n) ist gleichverteilt auf G.

(ii) Für jeden Charakter $\chi \ne \chi_0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{k\le x} \chi(g_k) = 0.$$

Beweis. $(i) \to (ii)$:
Es sei $\chi \ne \chi_0$. Dann ist

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{k\le x} \chi(g_k) = \sum_{g\in G} \lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{k\le x\\ g_k=g}} \chi(g) = \sum_{m\in G} \chi(g) \lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x, g) = \frac{1}{|G|} \sum_{m\in G} \chi(g) = 0.$$

$(ii) \to (i)$:
Es sei $g \in G$. Nach den Orthogonalitätsrelationen 2. Art (Satz 1.2.5 (ii)) ist

$$N(x, g) = \sum_{\substack{k\le x\\ g_k=g}} 1 = \sum_{\chi\in\hat{G}} \frac{1}{|G|} \sum_{k\le x} \chi(g_k)\overline{\chi(g)} = \overline{\chi_0(g)} \frac{1}{|G|} \sum_{k\le x} \chi_0(g_k) + \sum_{\chi\ne\chi_0} \overline{\chi(g)} \frac{1}{|G|} \sum_{k\le x} \chi(g_k).$$

Wegen $\chi_0(g) = 1$ und wegen (i) folgt:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x, g) = \frac{1}{|G|} \lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{k\le x} 1 + \sum_{\chi\ne\chi_0} \overline{\chi(g)} \frac{1}{|G|} \left(\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{k\le x} \chi(g_k) \right) = \frac{1}{|G|}.$$

$\square$

Kapitel 2

Riemannsche Zeta-Funktion, Dirichletsche L- Reihen und Primzahlverteilung

2.1 Einleitung

Die Primzahlen standen seit jeher im Mittelpunkt des Interesses vieler Mathematiker. Euklid konnte um 300 v.Chr. die Existenz von unendlich vielen Primzahlen beweisen. Zur feineren Untersuchung führt man die Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) = |\{p \leq x \colon p \text{ prim}\}| = \sum_{p \leq x} 1$$

ein. Hierbei gilt die Konvention, an die wir uns auch künftig halten wollen, dass der Buchstabe p unter einem Summen- bzw. Produktzeichen bedeutet, dass die Summe bzw. das Produkt nur über Primzahlen erstreckt wird. Der Primzahlsatz, der 1792 von Gauß vermutet, aber erst 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin unabhängig voneinander bewiesen werden konnte, besagt, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$$

ist. Die Beweise von Hadamard und de la Vallée-Poussin waren funktionentheoretischer Natur und beruhten auf der Beziehung zwischen Primzahlen und der Riemannschen Zeta-Funktion. Diese Beziehung wurde als erstes von Euler im 18. Jahrhundert entdeckt, der die Zeta-Funktion nur als Funktion einer reellen Variable betrachtete:

Definition 2.1.1. Die Riemannsche Zeta-Funktion (oder kurz Zeta- Funktion) ist durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

für $s > 1$ definiert.

Satz 2.1.1. *(Euler)*
Die Zeta-Funktion besitzt für $s > 1$ die Produktdarstellung

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Bemerkung 2.1.1. Dieses Produkt wird auch Eulerprodukt genannt.

Beweis. Die Produktdarstellung ist eine Folge des Fundamentalsatzes der Arithmetik: jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = \prod_p p^{\alpha(p)}$$

mit $\alpha(p) \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha(p) > 0$ nur für endlich viele p. Wir betrachten nun das Produkt

$$\prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p \le y} \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots\right).$$

Da die endlich vielen geometrischen Reihen in dem Produkt absolut konvergieren, darf das Produkt ausmultipliziert und die Summanden beliebig angeordnet werden.

$$\prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum{}' \left(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}\right)^{-s},$$

wobei in Σ' sämtliche Produkte von Primzahlpotenzen $p_j^{\alpha_j}$ mit $p_j \le y$ vorkommen. Nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik ergibt sich

$$\prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum{}'' n^{-s},$$

wobei in Σ'' sämtliche natürlichen Zahlen n vorkommen, die nur Primfaktoren $p \le y$ besitzen, insbesondere auch alle $n \le y$. Damit folgt

$$\left| \prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \right| \le \sum_{n > y} n^{-s},$$

also

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \lim_{y \to \infty} \prod_{p \le y} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s).$$

□

Riemann betrachtete 1859 die Zeta-Funktion erstmals als Funktion der komplexen Variablen $s \in \mathbb{C}$, und zeigte unter anderem, dass sich $\zeta(s)$ auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen lässt. Er stellte außerdem einige Vermutungen auf, die zum Teil 1894 von v. Mangoldt bewiesen wurden. Die berühmte Riemannsche Vermutung bleibt bis heute unbewiesen. Im Jahre 1896 bewiesen dann Hadamard und de la Vallée-Poussin den Primzahlsatz unter Verwendung der analytischen Eigenschaften von $\zeta(s)$. Wir werden in diesem Kapitel die grundlegenden analytischen Eigenschaften der Riemannschen Zeta-Funktion besprechen und dann den Beweis des Primzahlsatzes geben. Wir werden dabei jedoch nicht der Methode von Hadamard und de la Vallée-Poussin folgen, sondern im wesentlichen eine Methode von Edmund Landau benützen. Zunächst werden wir einige elementare Hilfsmittel besprechen.
Wir werden auch Verallgemeinerungen der Riemannschen Zeta- Funktion behandeln, die sogenannten Dirichletschen L- Reihen:
Es sei χ ein Dirichletcharakter der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$. Dann kann χ durch die Festsetzung

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi(n \bmod q) & \text{für } (n,q) = 1 \\ 0 & \text{für } (n,q) > 1 \end{cases}$$

zu einer Funktion auf den ganzen Zahlen $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ gemacht werden. Diese Funktion nennen wir Dirichletcharakter modulo q.

Unter der Dirichletschen L- Reihe $L(s,\chi)$ versteht man dann (zunächst für $s>1$)

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}.$$

Die Riemannsche Zeta- Funktion ergibt sich als Spezialfall für $q=1$ und $\chi(n)=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Beispiel 2.1.1. Es sei $q=10$ und χ mod q sei durch $\chi(7)=i$ definiert. Dann haben wir

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\chi(n)$	1	0	$-i$	0	0	0	i	0	-1	0	1	0

und somit

$$L(s,\chi)=1^{-s}-i\cdot 3^{-s}+i\cdot 7^{-s}-9^{-s}+11^{-s}-i\cdot 13^{-s}+i\cdot 17^{-s}-19^{-s}\pm\ldots.$$

Dirichletsche L- Reihen spielen eine zur Riemannschen Zeta- Funktion analoge Rolle für die Verteilung der Primzahlen in den arithmetischen Folgen a mod q.

2.2 Die Verwendung der Symbole O und o

Der Primzahlsatz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log(x)}=1$$

lässt sich auch folgendermaßen formulieren: Für $x\geq 2$ gilt

$$\pi(x)=\frac{x}{\log(x)}+R(x),$$

wobei für das Restglied $R(x)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{R(x)}{x/\log(x)}=0$$

gilt. Der Term $\frac{x}{\log(x)}$ heißt Hauptglied. Beziehungen der Form

Unbekannte Funktion = Hauptglied + Restglied,

wobei das Hauptglied explizit bekannt ist, während für das Restglied eine Abschätzung gegeben ist, spielen eine zentrale Rolle in der analytischen Zahlentheorie. Zur Vereinfachung der Formulierung hat Edmund Landau die nach ihm benannten O- und o- Symbole eingeführt. Diese alternative Beziehung wird mittels dieser Symbole folgendermaßen formuliert:

$$\pi(x)=\frac{x}{\log(x)}+o\left(\frac{x}{\log(x)}\right)=\frac{x}{\log(x)}\cdot(1+o(1))\quad(x\to\infty).$$

Definition 2.2.1. Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, die für genügend große positive x definiert sind, und es sei $f(x)$ beliebig komplex, $g(x)>0$, eventuell nur für genügend große x. Dann soll

$$f(x)=O\left(g(x)\right)\quad\text{bzw.}\quad f(x)=o\left(g(x)\right)\quad(x\to\infty)$$

bedeuten, dass für genügend große x und für passendes $A>0$

$$|f(x)|\leq A\cdot g(x)\quad\text{bzw.}\quad\frac{|f(x)|}{g(x)}\underset{x\to\infty}{\to}0$$

gilt. Analog mögen die Beziehungen

$$f(x)=O\left(g(x)\right)\quad\text{bzw.}\quad f(x)=o\left(g(x)\right)\quad(x\to a+)\quad\text{oder}\quad(x\to a-)$$

definiert sein, wobei $g(x)>0$ für x nahe bei a vorausgesetzt ist.

Beispiel 2.2.1. Es gilt

$$\sqrt{x^2+1} \;=\; x + O\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad (x \to \infty) \quad , \quad \frac{1}{\log(x)} \;=\; O\left(\tfrac{1}{x-1}\right) \quad (x \to 1+)\,.$$

Bemerkung 2.2.1. Manchmal hängt die im O- Symbol implizierte Konstante auch noch von anderen Parametern ab. Diese können dann in Indexform an das O- Symbol angehängt werden, etwa $O_\epsilon(f(x))$.

2.3 Abelsche partielle Summation und Eulersche Summenformel

Satz 2.3.1. *(Abelsche partielle Summation)*
Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $c_1, c_2, \ldots$ komplexe Zahlen. Es sei $c(x) = \sum\limits_{a<n\le x} c_n$.
Dann gilt:

(i) (diskrete Version)
Es seien $f_1, \ldots f_n$ komplexe Zahlen mit $(\Delta f)_n = f_{n+1} - f_n$. Dann gilt:

$$\sum_{a<n\le b} c_n f_n = c(b) f_{[b]} - \sum_{a<n\le b-1} c(n)\,(\Delta f)_n\,.$$

(ii) (kontinuierliche Version)
Es gilt

$$\sum_{a<n\le b} c_n f_n = c(b) f(b) - \int_a^b c(t) f'(t)\,dt.$$

Beweis. (i) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} c_n f_n &= \sum_{a<n\le b} \left(c(n) - c(n-1)\right) f_n = \sum_{a<n\le b} c(n) f_n - \sum_{a<n\le b-1} c(n) f_{n+1} \\ &= c(b) f_{[b]} - \sum_{a<n\le b-1} c(n)\,(f_{n+1} - f_n)\,.\end{aligned}$$

Dies beweist Teil (i).

(ii) Es seien die Voraussetzungen von Teil (ii) erfüllt. Zudem setzen wir $f_n := f(n)$.
Für $t \in [n, n+1)$ ist $c(t) = c(n)$, und es ist $f_{n+1} - f_n = \int_n^{n+1} f'(t)\,dt$, also

$$c(n)\,(f_{n+1} - f_n) = \int_n^{n+1} c(t) f'(t)\,dt. \tag{1}$$

Außerdem ist

$$c(b) f(b) - c([b]) f_{[b]} = \int_{[b]}^b c(t) f'(t)\,dt. \tag{2}$$

Damit folgt aus (i), (1) und (2)

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} c_n f_n &= c(b) f(b) - \left(c(b) f(b) - c([b]) f([b])\right) - \int_a^{[b]} c(t) f'(t)\,dt \\ &= c(b) f(b) - \int_a^b c(t) f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

Satz 2.3.2. *(Eulersche Summenformel)*
Es seien $a < x$ reelle Zahlen. Die Funktion $g\colon [a, x] \to \mathbb{C}$ sei stetig und (stückweise) stetig differenzierbar auf $[a, x]$. Wir setzen $P_0(x) := x - [x] - 1/2$. Dann ist

$$\sum_{a<n\leq x} g(n) = \int_a^x g(u)\,du + \int_a^x P_0(u)g'(u)\,du - g(x)P_0(x) + g(a)P_0(a).$$

Beweis. Übungen. □

2.4 Dirichletsche Reihen

Bevor wir nun zur Diskussion der Riemannschen Zeta-Funktion als Funktion der komplexen Variablen $s \in \mathbb{C}$ kommen, wollen wir die allgemeine Funktionsklasse diskutieren, der die Zeta-Funktion angehört: die Dirichletschen Reihen.

Definition 2.4.1. Eine Dirichletreihe ist eine unendliche Reihe der Form

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $s \in \mathbb{C}$.

Es stellt sich sofort die Frage nach dem Konvergenzbereich von $D(s)$ und nach den analytischen Eigenschaften, insbesondere der Holomorphie, von $D(s)$ in diesem Bereich. Im Zusammenhang mit Dirichletschen Reihen ist die Schreibweise $s = \sigma + it$ mit $\sigma = \Re(s)$, $t = \Im(s)$ üblich (oder, falls eine Folge vorliegt, $s_j = \sigma_j + it_j$).

Satz 2.4.1. *Es sei*

$$D(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

in s_0 konvergent, dann konvergiert $D(s)$ gleichmäßig in dem Winkelraum $|\arg(s - s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$ für festes $\delta > 0$. Die Funktion $D(s)$ ist in der Halbebene $\{\sigma > \sigma_0\}$ holomorph.

Beweis. Mit partieller Summation (Satz 2.3.1) folgt

$$\begin{aligned}\sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s} &= \sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s_0} n^{s_0-s} \\ &= N^{s_0-s} \sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s_0} - \int_M^N \left(\sum_{M<n\leq u} a_n n^{-s_0} \right) (s_0 - s) u^{s_0-s-1} du\,.\end{aligned}$$

Es ist $|N^{s_0-s}| = N^{\sigma_0-\sigma} \leq 1$. Wegen der Konvergenz von $\sum a_n n^{-s_0}$ ist

$$\left| \sum_{M<n\leq u} a_n n^{-s_0} \right| \;<\; \varepsilon$$

für $M > M_0(\varepsilon)$ groß genug und jedes $u > M$, und damit

$$\left| N^{s_0-s} \cdot \sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s} \right| \;<\; \varepsilon$$

im Winkelraum $|\arg(s - s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$.

Es ist
$$\left|(s_0 - s)u^{s_0-s-1}\right| \le \frac{1}{\sin(\delta)} \cdot (\sigma - \sigma_0)u^{\sigma-\sigma_0-1}$$
und damit
$$\left|\int_M^N \left(\sum_{M<n\le u} a_n n^{-s_0}\right)(s_0 - s)u^{s_0-s-1}du\right| \le \frac{\varepsilon}{\sin(\delta)} M^{\sigma-\sigma_0} \le \frac{\varepsilon}{\sin(\delta)}.$$
Damit folgt der erste Teil des Satzes. Jede kompakte Teilmenge von $\{s = \sigma + it \ : \ \sigma > \sigma_0\}$ ist für ein genügend kleines $\delta > 0$ im Winkelraum $|\arg(s - s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$ enthalten. Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$
ist damit in $\{\sigma > \sigma_0\}$ kompakt konvergent und damit holomorph. □

Satz 2.4.2. *Zu jeder Dirichletreihe*
$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$
gibt es stets ein $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so dass $D(s)$ für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma > \sigma_c$ konvergiert und für $\sigma < \sigma_c$ divergiert.

Beweis. Man setze
$$\sigma_c = \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R} \colon \exists s = \sigma + it, \ \sum a_n n^{-s} \text{ konvergiert}\right\},$$
und die Behauptung folgt dann aus dem vorigen Satz. □

Definition 2.4.2. Der Wert σ_c heißt Konvergenzabszisse der Dirichletreihe $D(s)$.

Die Fälle $\sigma_c = \pm\infty$ können eintreten:

Beispiel 2.4.1. Die Dirichletreihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^{-s}$$
konvergiert für kein $s \in \mathbb{C}$, hat also die Konvergenzabszisse $\sigma_c = \infty$. Dagegen konvergiert
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n^{-s}$$
für alle $s \in \mathbb{C}$ und hat die Konvergenzabszisse $\sigma_c = -\infty$. Auch alle Dirichletpolynome
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$
wobei $a_n \neq 0$ nur endlich oft auftritt, haben die Konvergenzabszisse $\sigma_c = -\infty$.

2.5 Arithmetische Funktionen und ihre Erzeugenden Dirichlet- Reihen

Definition 2.5.1. Eine arithmetische Funktion ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ von den natürlichen Zahlen in die komplexen Zahlen.
Eine arithmetische Funktion f heißt additiv, falls $f(mn) = f(m) + f(n)$ für $ggT(m,n) = 1$ ist bzw. multiplikativ, falls $f(1) = 1$ und $f(mn) = f(m)f(n)$ für $ggT(m,n) = 1$ ist. Vollständig additiv bzw. vollständig multiplikativ heißt f, falls die Gleichungen $f(mn) = f(m)+f(n)$ bzw. $f(mn) = f(m)f(n)$ auch ohne die Zusatzbedingung $ggT(m,n) = 1$ gelten.

Im folgenden werden einige Beispiele arithmetischer Funktionen definiert:

Definition 2.5.2.

1. In der Analysis vorkommende Besipiele vollständig additiver bzw. multiplikativer Funktionen sind $\log n$ bzw. n^α für $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Die Funktion
$$\epsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad n = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
ist vollständig multiplikativ.

3. Die Funktion 1 mit $1(n) := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ebenfalls vollständig multiplikativ.

4. Sei $\Omega(n) := \sum_{p^\alpha | n} \alpha$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n (mit Vielfachheit gezählt) und $\omega(n) := \sum_{p|n} 1$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n. Dann ist Ω vollständig additiv und ω additiv.

5. Die Eulersche φ- Funktion ist multiplikativ.

6. Die Möbiusfunktion μ ist durch
$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{falls } n \text{ quadratfrei ist,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
definiert. Wir werden zeigen, dass μ multiplikativ ist.

7. Die Teilerfunktion $\tau(n) := \sum_{d|n} 1$, die Anzahl der (positiven) Teiler von n, ist, wie wir zeigen werden, multiplikativ.

Definition 2.5.3. Es seien f und g arithmetische Funktionen. Unter der Faltung $f \star g$ von f und g versteht man die arithmetische Funktion
$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$
Unter der Summe $f + g$ von f und g versteht man die arithmetische Funktion
$$(f + g)(n) = f(n) + g(n).$$

Beispiel 2.5.1. Es ist $\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} 1(d) \cdot 1(\frac{n}{d})$, also $\tau = 1 \star 1$.

Satz 2.5.1. *Die Menge A aller arithmetischen Funktionen bildet mit der Addition und der Faltung als Multiplikation einen kommutativen Ring mit Einselelement ϵ.*

Beweis. Die Menge A bildet offenbar unter der Addition von Funktionen eine abelsche Gruppe. Das Distributivgesetz $f \star (g+h) = (f \star g) + (f \star h)$ ist klar.
Es bleibt die Kommutativität und Assoziativität der Faltung zu zeigen, sowie dass ϵ Einselement ist:

- Es ist $(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$. Durchläuft d alle Teiler von n, so auch $d' = \frac{n}{d}$. Also ist
$$(f \star g)(n) = \sum_{d'|n} f\left(\frac{n}{d'}\right) g(d') = (g \star f)(n).$$

- Seien f, g, h arithmetische Funktionen. Dann ist
$$\begin{aligned} ((f \star g) \star h)(n) &= \sum_{d|n} (f \star g)(d) \cdot h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} \sum_{d_1|d} f(d_1) g\left(\frac{d}{d_1}\right) h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &\underset{d=d_1 d_2, \frac{n}{d}=d_3}{=} \sum_{\substack{d_1,d_2,d_3 \\ d_1 d_2 d_3 = n}} f(d_1) g(d_2) h(d_3). \end{aligned}$$
Derselbe Ausdruck ergibt sich für $(f \star (g \star h))(n)$. Also ist $(f \star g) \star h) = f \star (g \star h)$.

- Es ist $(\epsilon \star g)(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) f(\frac{n}{d}) = \epsilon(1) f(n) = f(n)$. Also ist $\epsilon \star f = f$.

$\square$

Satz 2.5.2. *Die Faltung zweier multiplikativer Funktionen ist multiplikativ.*

Beweis. Es seien $f, g \in A$ multiplikativ und $F = f \star g$. Sei $ggT(m, n) = 1$. Dann ist
$$F(mn) = \sum_{\substack{d_1,d_2 \\ d_1 d_2 = mn}} f(d_1) g(d_2).$$
Wir schreiben $d_1 = e_1 e_2$ mit $e_1 = ggT(d_1, m)$ und $e_2 = ggT(d_1, n)$ sowie analog $d_2 = e_3 e_4$ mit $e_3 = ggT(d_2, m)$ und $e_4 = ggT(d_2, n)$. Dies ist bei gegebenem d_1 und d_2 auf genau eine Art möglich. Dann ist $e_1 e_3 = m$ und $e_2 e_4 = n$.
Also ist wegen der Multiplikativität von f und g
$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{\substack{e_1,e_2,e_3,e_4 \\ e_1 e_3 = m, e_2 e_4 = n}} f(e_1 e_2) g(e_3 e_4) = \sum_{\substack{e_1,e_2,e_3,e_4 \\ e_1 e_3 = m, e_2 e_4 = n}} f(e_1) f(e_2) g(e_3) g(e_4) \\ &= \sum_{\substack{e_1,e_3 \\ e_1 e_3 = m}} f(e_1) g(e_3) \sum_{\substack{e_2,e_4 \\ e_2 e_4 = n}} f(e_2) g(e_4) = F(m) \cdot F(n). \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.5.3. *Die Teilerfunktion ist multiplikativ.*

Beweis. Aus Satz 2.5.2 ergibt sich mit $\tau = 1 \star 1$ ein Beweis für die Multiplikativität der Teilerfunktion.
$\square$

Beispiel 2.5.2. Es sei $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$. Es ist $\sigma_k = f \star 1$ mit $f(n) = n^k$.
Nach Satz 2.5.2 ist σ_k multiplikativ.

Satz 2.5.4. *Es ist $\mu \star 1 = \epsilon$.*

Beweis. Nach Satz 2.5.2 ist $\mu \star 1$ multiplikativ. Es bleibt, die Werte von $\mu \star 1$ für Primzahlpotenzen zu bestimmen: Für $\alpha \geq 1$ ist

$$(\mu \star 1)(p^\alpha) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \mu\left(p^\beta\right) = 1 + \mu(p) = 0.$$

Also ist $\mu \star 1 = \epsilon$. □

Satz 2.5.5. *(Möbiussche Umkehrformel)*
Es seien f und g arithmetische Funktionen. Die folgenden Beziehungen sind äquivalent:

(i) $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

Beweis. "$\Rightarrow$":
Nach der Definition der Faltung haben wir $F = 1 \star f$. Daraus folgt nach Satz 2.5.1 und 2.5.3

$$\mu \star F = \mu \star (1 \star f) = (\mu \star 1) \star f = \epsilon \star f = f.$$

Also ist $\sum_{d|n} \mu(d) F(\frac{n}{d}) = f(n)$.

"$\Leftarrow$":
Es ist also $\mu \star F = f$. Dann ist

$$f \star 1 = 1 \star (\mu \star F) = (1 \star \mu) \star F = \epsilon \star F = F,$$

also $\sum_{d|n} f(d) = F(n)$. □

Satz 2.5.6. *(2. Möbiussche Umkehrformel)*
Die Funktionen F und G seien auf $[1, \infty)$ definiert. Dann sind folgende Beziehungen äquivalent:

(i) $F(x) = \sum_{n \leq x} G\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \geq 1$

(ii) $G(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \geq 1$

Beweis. "$\Rightarrow$":
Für $x \geq 1$ gilt

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq x/n} G\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{k \leq x} G\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{mn=k} \mu(m).$$

Nach Satz 2.5.4 hat die innere Summe den Wert $\epsilon(k)$. Daher ist

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) = G(x).$$

"$\Leftarrow$":
Für $x \geq 1$ gilt

$$\sum_{n\leq x} G\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leq x}\sum_{m\leq x/n} \mu(m) F\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{k\leq x} F\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{mn=k} \mu(m).$$

Wie oben folgt dann

$$\sum_{n\leq x} G\left(\frac{x}{n}\right) = F(x).$$

□

Definition 2.5.4. Es sei f eine arithmetische Funktion. Für alle $s \in \mathbb{C}$, für die

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

konvergiert, heißt $F(s)$ die Erzeugende Dirichletreihe von f.

Satz 2.5.7. *Es seien f, g, h arithmetische Funktionen, so dass $h = f \star g$ ist. Die zugehörigen Erzeugenden Dirichletreihen seien F, G und H. Falls F und G in $s_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren, so ist für dieses s_0 auch H absolut konvergent, und es ist $H(s_0) = F(s_0)G(s_0)$.*

Beweis. Nach dem Großen Umordnunggsatz ist

$$\begin{aligned} F(s_0)G(s_0) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(k)k^{-s_0}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} g(m)m^{-s_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{km=n} f(k)g(m)(km)^{-s_0}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} h(n)n^{-s_0} = H(s_0), \end{aligned}$$

und letztere unendliche Reihe ist absolut konvergent. □

Ist die Funktion f multiplikativ, so kann die Erzeugende Dirichletreihe von f unter gewissen Voraussetzungen als sogenanntes Eulerprodukt dargestellt werden.

Satz 2.5.8. *Es sei f eine multiplikative Funktion und $s \in \mathbb{C}$. Ist*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

absolut konvergent, so ist

$$F(s) = \prod_{p}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} f\left(p^{\alpha}\right) p^{-\alpha s}\right).$$

Beweis. Aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ folgt die Konvergenz von $\sum_{p}\sum_{\alpha\geq 1}\left|f(p^{\alpha})p^{-\alpha s}\right|$ und daraus die Konvergenz des unendlichen Produkts $M := \prod_{p}\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} f(p^{\alpha})p^{-\alpha s}\right)$.

Es sei $p^{+}(n)$ der größte Primfaktor von n. Dann gilt für alle $x \geq 1$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} - \prod_{p\leq x}\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} f(p^{\alpha})p^{-\alpha s}\right)\right| = \left|\sum_{p^{+}(n)>x} f(n)n^{-s}\right| \leq \sum_{n>x} |f(n)n^{-s}|.$$

Daraus folgt die Behauptung für $x \to \infty$. □

Bemerkung 2.5.1. Ist f vollständig multiplikativ, so nimmt das Produkt die einfache Form

$$\prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

an.

Definition 2.5.5. Es sei $q \in \mathbb{N}$. Eine arithmetische Funktion $\chi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt Dirichletcharakter modulo q, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\chi \neq 0$

(ii) $\chi(n+q) = \chi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\chi(n) = 0 \Leftrightarrow (n, q) > 1$

(iv) $\chi(mn) = \chi(m) \cdot \chi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Der Dirichletcharakter χ_0 mit

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (q, n) = 1, \\ 0, & \text{falls } (q, n) > 1 \end{cases}$$

heißt Hauptcharakter modulo q.
Ein Dirichletcharakter χ modulo q kann zu einer Funktion $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ durch folgende Festsetzung fortgestzt werden:
Für $z \in \mathbb{Z}$ wähle k, so dass $z + kq \in \mathbb{N}$ und setze $\chi(z) = \chi(z + kq)$.

Satz 2.5.9. *Es sei $q \in \mathbb{N}$. Dann ist $\chi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ genau dann ein Dirichletcharakter modulo q, wenn*

(i) $\chi(n+q) = \chi(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\chi(n) = 0$ *für alle n mit* $(n, q) > 1$ *und*

(iii) wenn die Funktion $\sim \chi\colon (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^* \to \mathbb{C}$, die durch $\tilde{\chi}(n \bmod q) = \chi(n)$ definiert ist, ein Charakter der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$ ist.

Es gibt $\varphi(q)$ Dirichletcharaktere modulo q.

2.6 Die Riemannsche Zeta-Funktion und Dirichletsche L- Reihen

Definition 2.6.1. Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q.
Die zu χ gehörige Dirichletsche L- Reihe $L(s, \chi)$ ist durch

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

für $\sigma > 1$ definiert. Im Spezialfall $q = 1$ erhält man die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Satz 2.6.1. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Die Dirichletsche L- Reihe $L(s,\chi)$ stellt für $\sigma > 1$ eine holomorphe Funktion dar. Sie besitzt dort das Eulerprodukt*

$$L(s,\chi) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}.$$

Insbesondere ist $L(s,\chi) \neq 0$, und es ist

$$L(s,\chi)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\chi(n)n^{-s}.$$

Beweis. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$$

konvergiert für $\sigma > 1$. Die Existenz des Eulerprodukts wird ähnlich wie in Satz 2.1.1 bewiesen. □

Satz 2.6.2. *Die Riemannsche Zeta-Funktion lässt sich meromorph auf den Bereich $\{\sigma > 0\}$ fortsetzen. Die einzige Singularität ist ein Pol erster Ordnung in $s = 1$ mit Residuum 1.*

Beweis. Anwendung der Eulerschen Summenformel (Satz 2.3.2) für $\Re(s) > 1$ und einem beliebig kleinen $\epsilon > 0$ ergibt

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \int_{1-\epsilon}^{\infty} u^{-s}\,du + s\int_{1-\epsilon}^{\infty} P_0(u)u^{-s-1}\,du + (1-\epsilon)^{-s}\cdot P_0(1-\epsilon) \\ &\underset{\epsilon\to 0}{=} \int_1^{\infty} u^{-s}\,du + s\int_1^{\infty} P_0(u)u^{-s-1}\,du + \frac{1}{2} = \frac{1}{s-1} + s\int_1^{\infty} \frac{u-\lfloor u\rfloor - \frac{1}{2}}{u^{s+1}}\,du + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen $|P_0(u)| = |u - \lfloor u\rfloor - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ ist die Folge

$$\int_1^N \frac{u-\lfloor u\rfloor - \frac{1}{2}}{u^{s+1}}\,du$$

in der Halbebene $\Re(s) > 0$ kompakt konvergent. Also stellt

$$s\int_1^{\infty} P_0(u)u^{-s-1}\,du$$

eine in $\Re(s) > 0$ holomorphe Funktion dar. Die übrigen Summanden sind dort ebenfalls holomorph, außer in $s = 1$, da dort $\frac{1}{s-1}$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1 aufweist. □

Satz 2.6.3. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q.*

(i) Ist $\chi = \chi_0$ der Hauptcharakter modulo q, so konvergiert die Dirichletreihe $L(s,\chi_0)$ für $\sigma > 1$. Es ist

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s)\cdot\prod_{p|q}(1-p^{-s}).$$

Dann lässt sich $L(s,\chi_0)$ auf den Bereich $\{\sigma > 0\}$ meromorph fortsetzen. Die einzige Singularität ist ein Pol erster Ordnung mit Residuum

$$\mathrm{Res}_{s=1} L(s,\chi_0) = \prod_{p|q}(1-p^{-1}).$$

(ii) Ist $\chi \neq \chi_0$, so konvergiert $L(s,\chi)$ für $\sigma > 0$ und ist dort auch holomorph.

Beweis. (i) Es gilt

$$\begin{aligned} L(s,\chi_0) &= \prod_{p\in\mathbb{P}} 1-\chi_0(p)p^{-s})^{-1} = \prod_{p\nmid q}(1-p^{-s})^{-1} = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1}\cdot\prod_{p|q}(1-p^{-s}) \\ &= \zeta(s)\cdot\prod_{p|q}(1-p^{-s}). \end{aligned}$$

Die übrigen Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion.

(ii) Abelsche partielle Summation ergibt (zunächst für $\sigma > 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s} = \int_1^{\infty}\left(\sum_{n\le t}\chi(n)\right)t^{-s-1}\,dt. \qquad (*)$$

Es sei $mq \le t < (m+1)q$. Dann ist

$$\sum_{n\le t}\chi(n) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{kq\le n<(k+1)q}\chi(n) + \sum_{mq\le t<(m+1)q}\chi(n).$$

Wegen

$$\sum_{kq\le n<(k+1)q}\chi(n) = 0$$

folgt

$$\left|\sum_{n\le t}\chi(n)\right| \le q.$$

Damit ist $(*)$ für $\sigma > 0$ konvergent.

□

2.7 Primitive Charaktere und Gaußsche Summen

Definition 2.7.1. Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Es sei $q^*|q$ und χ^* ein Dirichletcharakter modulo q^*. Man sagt, χ wird von χ^* induziert, wenn $\chi = \chi_0\chi^*$ mit dem Hauptcharakter χ_0 mod q ist.
Unter dem Führer von χ versteht man den kleinsten Teiler q^* von q, für den χ von einem Charakter modulo q^* induziert wird. Ist $q^* = q$, so heißt χ primitiv.

Wir beginnen mit einem Kriterium für Primitivität.

Satz 2.7.1. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Dann ist χ genau dann nicht primitiv, wenn es einen Teiler q^* von q mit $q^* < q$ gibt, so dass $\chi(1+kq^*) = 1$ für alle k mit $(1+kq^*, q) = 1$ gilt.*

Beweis. "$\Rightarrow$":
Es sei χ mod q nicht primitiv und χ habe den Führer $q^* < q$, und es gelte $\chi = \chi_0\chi^*$ mit einem Dirichletcharakter χ^* mod q^*. Dann ist $\chi(1+kq^*) = \chi_0(1+kq^*)\chi^*(1+kq^*)$. Falls $(1+kq^*, q) = 1$ gilt, haben wir $\chi_0(1+kq^*) = 1$ und $\chi^*(1+kq^*) = 1$, also $\chi(1+kq^*) = 1$.

"$\Leftarrow$":
Es sei $q^*|q$ mit $q^* < q$ und $\chi(1+kq^*) = 1$ für alle k mit $(1+kq^*, q) = 1$.
Weiter sei $(c,q) = (c+kq^*, q) = 1$. Es existiert das multiplikative Inverse $\overline{c}$ mit $c\overline{c} \equiv 1 \bmod q$ mit $(\overline{c}, c) = 1$. Dann ist $\overline{c}(c+kq^*) \equiv 1 \bmod q^*$ und $\chi(\overline{c}) = \chi(c)^{-1}$, sowie

$$1 = \chi(\overline{c}(c+kq^*)) = \chi(c)^{-1}\chi(c+kq^*).$$

Damit haben wir gezeigt, dass aus $(c,q) = (c+kq^*, q) = 1$ die Aussage

$$\chi(c) = \chi(c+kq^*) \tag{1}$$

folgt. Wir definieren nun $\chi^* \bmod q^*$. Es sei $(c, q^*) = 1$ und $p_1, \ldots, p_l$ sämtliche Primzahlen, für die $p_j|q$ und $p_j \not| q^*$ gilt. Dann gibt es $k_1, \ldots, k_l$ mit $c + k_j q^* \equiv 1 \bmod p_j$. Es sei k die nach dem Chinesischen Restsatz existierende Lösung des Systems

$$\begin{aligned} k &\equiv k_1 \bmod p_1 \\ &\vdots \\ k &\equiv k_l \bmod p_l. \end{aligned}$$

Dann ist $(c+kq^*, q) = 1$. Wir setzen $\chi^*(c) = \chi(c+kq^*)$. Damit ist χ^* wohldefiniert, da $\chi(c+kq^*)$ nach (1) unabhängig von k ist. Man prüft leicht nach, dass χ^* ein Dirichletcharakter modulo q^* ist und dass $\chi = \chi_0\chi^*$ mit dem Hauptcharakter $\chi_0 \bmod q$ ist. □

Beispiel 2.7.1. Es sei $q = 15$. Der Dirichletcharakter modulo 15 sei durch

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\chi(n)$	1	-1	0	1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	1	-1

gegeben. Weiter sei $\chi^* \bmod 3$ durch

n	1	2	3
$\chi(n)$	1	-1	0

gegeben. Dann ist $\chi = \chi_0\chi^*$ mit χ_0 als dem Hauptcharakter modulo 15. Damit hat χ den Führer 3 und ist nicht primitiv.

Beispiel 2.7.2. Es sei $q = 8$. Die vier Dirichletcharaktere modulo 8 sind durch

n	1	2	3	4	5	6	7
$\chi_0(n)$	1	0	1	0	1	0	1
$\chi_1(n)$	1	0	1	0	-1	0	-1
$\chi_2(n)$	1	0	-1	0	1	0	-1
$\chi_3(n)$	1	0	-1	0	-1	0	1

gegeben. Der Hauptcharakter χ_0 hat den Führer 1 und ist damit nicht primitiv. Charakter χ_2 hat den Führer 4. Er ist ein primitiver Dirichletcharakter modulo 4 aber nicht modulo 8. Schließlich sind χ_1 und χ_3 primitive Dirichletcharaktere modulo 8 und haben somit Führer 8.

Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Durch die Definition $\tilde{\chi}(n \bmod q) = \chi(n)$ erhalten wir die Funktion

$$\tilde{\chi} \colon \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}.$$

Nach Satz 1.2.6 kann die Funktion $\tilde{\chi}$ und damit auch χ als Linearkombination der Charaktere der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ dargestellt werden, der Fourierreihe von χ.
Man kann also die Charaktere χ der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$ als Fourierreihe mit den Charakteren

$$e_{m,q} \colon n \bmod q \to e\left(\frac{mn}{q}\right)$$

der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ schreiben. Dies ist im Fall der primitiven Charaktere besonders einfach.
Zur Vorbereitung zeigen wir folgenden

Satz 2.7.2. *Es sei $q \in \mathbb{N}$, χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo q und $q^*|q$ mit $q^* < q$ und $(l, q^*) = 1$. Dann gilt*

$$\sum_{\substack{0 \le m \le q-1 \\ m \equiv l \bmod q^*}} \chi(m) = 0.$$

Beweis. Es sei

$$S = \sum_{\substack{0 \le m \le q-1 \\ m \equiv l \bmod q^*}} \chi(m) = 0$$

und $r \equiv 1 \bmod q^*$ mit $(r, q) = 1$. Dann ist

$$\chi(r) \cdot \sum_{\substack{0 \le m \le q-1 \\ m \equiv l \bmod q^*}} \chi(m) = \sum_{\substack{0 \le m \le q-1 \\ m \equiv l \bmod q^*}} \chi(rm) = S,$$

da mit m auch rm alle Restklassen, die kongruent $l \bmod q^*$ sind, durchläuft. Wäre $S \neq 0$, so wäre $\chi(r) = 1$ für alle $r \equiv 1 \bmod q^*$ mit $(r, q) = 1$, und damit wäre χ nach Satz 2.7.1 nicht primitiv. $\square$

Definition 2.7.2. (i) Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q.
Unter der Gaußschen Summe $\tau(\chi)$ verstehen wir

$$\tau(\chi) = \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot e\left(\frac{m}{q}\right).$$

(ii) Es heißt

$$c_q(n) = \sum_{\substack{m \bmod q \\ (m,q)=1}} e\left(\frac{mn}{q}\right)$$

die Ramanujan- Summe.

Bemerkung 2.7.1. Offenbar ist $c_q(1) = \tau(\chi_0)$ mit dem Hauptcharakter $\chi_0 \bmod q$.

Satz 2.7.3. *Es seien $q, n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$c_q(n) = \sum_{d|(q,n)} d \cdot \mu(q/d).$$

Beweis. Es gilt mit $m = ld$ und $d' = q/d$

$$\begin{aligned} c_q(n) &= \sum_{\substack{m \bmod q \\ (m,q)=1}} e\left(\frac{mn}{q}\right) = \sum_{m \bmod q} e\left(\frac{mn}{q}\right) \cdot \sum_{\substack{d|m \\ d|q}} \mu(d) = \sum_{d|q} \mu(d) \cdot \sum_{l \bmod q/d} e\left(\frac{ln}{q/d}\right) \\ &= \sum_{d'|q} \mu(q/d') \cdot \sum_{l \bmod d'} e\left(\frac{ln}{d'}\right) = \sum_{d'|(q,n)} \mu(q/d')d'. \end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zur angekündigten Darstellung von primitiven Charakteren $\chi \bmod q$ als Fourierreihe bzgl. der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$.

Satz 2.7.4. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Dann ist*

(i) $|\tau(\chi)| = q^{1/2}$

(ii) Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\chi(a) = \tau(\overline{\chi})^{-1} \cdot \sum_{m \bmod q} \overline{\chi}(m) \cdot e\left(\frac{am}{q}\right).$$

Beweis. (i) Für $(n, q) = 1$ haben wir

$$\tau(\chi) = \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot e\left(\frac{m}{q}\right) = \chi(n) \cdot \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

da mit m auch nm alle Restklassen modulo q durchläuft. Somit ist

$$\begin{aligned} |\tau(\chi)|^2 &= \sum_{n \bmod q} \chi(n)\overline{\chi(n)} \cdot \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot e\left(\frac{mn}{q}\right) \cdot e\left(-\frac{n}{q}\right) \\ &= \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot \sum_{\substack{n \bmod q \\ (n,q)=1}} e\left(\frac{(m-1)n}{q}\right). \end{aligned}$$

Die innere Summe ist die Ramajunan- Summe $c_q(m-1)$. Nach Satz 2.7.3 haben wir

$$|\tau(\chi)|^2 = \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot \sum_{\substack{d|q \\ d|m-1}} d \cdot \mu(q/d) = \sum_{d|q} d \cdot \mu(q/d) \cdot \sum_{\substack{m \bmod q \\ m \equiv 1 \bmod d}} \chi(m).$$

Wegen der Primitivität von χ verschwindet nach Satz 2.7.2 die innere Summe außer für $d = q$, wo sie den Wert 1 hat. Damit gilt $|\tau(\chi)|^2 = q$.

(ii) Es sei $(a, q) = 1$. Dann haben wir

$$\tau(\overline{\chi}) = \sum_{m \bmod q} \overline{\chi(m)} \cdot e\left(\frac{m}{q}\right) = \sum_{m \bmod q} \overline{\chi(am)} \cdot e\left(\frac{am}{q}\right) = \overline{\chi(a)} \cdot \sum_{m \bmod q} \overline{\chi(m)} \cdot e\left(\frac{am}{q}\right).$$

Daraus folgt die Behauptung, da $\tau(\overline{\chi}) \neq 0$ nach (i) gilt. Für $(a, q) > 1$ verschwinden beide Seiten.

□

2.8 Die Poissonsche Summenformel

Satz 2.8.1. *Die Funktion $f\colon [0,1) \to \mathbb{C}$ sei stetig, es gelte $f(0) = f(1)$, und f habe die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$ mit*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \cdot e(\alpha n) = f$$

gleichmäßig auf $[0,1)$.

Beweis. Übungen. $\square$

Satz 2.8.2. *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar, und es gelte $f(x) = f(x+1)$. Dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \cdot e(\alpha n) = f(\alpha)$$

gleichmäßig in α.

Beweis. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_0^1 f(t) \cdot e(-nt)\, dt = \left[f(t) \cdot \frac{e(-nt)}{-2\pi i n} \right]_0^1 + \frac{1}{2\pi i n} \cdot \int_0^1 f'(t) \cdot e(-nt)\, dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2 n^2} \cdot \int_0^1 f''(t) \cdot e(-nt)\, dt. \end{aligned}$$

Also gilt

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{4\pi^2 n^2} \cdot \int_0^1 |f''(t)|\, dt.$$

Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.8.1. $\square$

Definition 2.8.1. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty.$$

Dann nennt man $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e(-nt)\, dt$$

die <u>Fouriertransformierte</u> von f.

Satz 2.8.3. *(Poissonsche Summenformel)*
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig- differenzierbar, und mit einer Konstanten $C > 0$ gelte

$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq C \cdot \frac{1}{1+x^2}. \tag{1}$$

Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

Beweis. Die Funktion

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

besitzt offenbar die Periode 1. Wegen der Bedingung (1) konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x+k)$$

gleichmäßig für $m = 0, 1, 2$. Also ist $F(x)$ zweimal stetig-differenzierbar.
Nach Satz 2.8.2 konvergiert die Fourierreihe $S_F(x, N)$ gleichmäßig gegen $F(x)$, also gilt

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}(n)e(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 F(t)e(-nt)\, dt \right) \cdot e(nx) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(t+k)e(-n(t+k))\, dt \right) \cdot e(nx) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(t)e(-nt)\, dt \right) \cdot e(nx) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e(-nt)\, dt \right) \cdot e(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e(nx).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Einsetzen von $x = 0$. □

Satz 2.8.4. *Die Funktion erfülle die gleichen Voraussetzungen von Satz 2.8.3. Weiter sei $v \in (0, \infty)$ und $u \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(vn + u) = \frac{1}{v} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{n}{v}\right) \cdot e\left(\frac{un}{v}\right).$$

Beweis. Wir setzen $g(x) = f(vx + u)$. Offensichtlich gilt

$$|g(x)| + |g'(x)| + |g''(x)| \le C \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

Mit der Substitution $w = vx + u$ folgt

$$\begin{aligned}
\hat{g}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e(-xy)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(vx + u) \cdot e(-xy)\, dx \\
&= \frac{1}{v} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \cdot e\left(-\left(\frac{w}{v} - \frac{u}{v}\right) y\right)\, dw \\
&= \frac{1}{v} \cdot e\left(\frac{uy}{v}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \cdot e\left(-\frac{wy}{v}\right)\, dw = \frac{1}{v} \cdot e\left(\frac{uy}{v}\right) \cdot \hat{f}\left(\frac{y}{v}\right).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.8.3. □

2.9 Die Gamma-Funktion

Definition 2.9.1. Die <u>Gamma-Funktion</u> Γ ist über

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

mit $t^{z-1} = \exp((z-1)\log(t))$ definiert.

Satz 2.9.1. *Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ ist für $\Re(z) > 0$ holomorph, und auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar. Sie besitzt Pole in den Stellen $\{0, -1, -2, -3 \ldots\}$. Es sind Pole erster Ordnung, das Residuum in $-n$ ist $\frac{(-1)^n}{n!}$. Die Funktion $\Gamma(z)$ genügt der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, und es ist $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Die Folge

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

ist für $\Re(z) > 0$ kompakt konvergent und besitzt daher eine holomorphe Grenzfunktion $\Gamma(z)$. Durch partielle Integration erhalten wir für $\Re(z) > 0$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + z \cdot \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = z \cdot \Gamma(z)$$

und damit durch Induktion

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdots (z+n)}. \tag{1}$$

Die rechte Seite ist nun meromorph für $\Re(z) > -(n+1)$ und ist dort holomorph bis auf die Nullstellen $\{0, -1, -2, \ldots\}$ des Nenners, die Pole erster Ordnung konstituieren. Da n beliebig gewählt werden kann, ergibt sich die meromorphe Fortsetzbarkeit in die gesamte komplexe Ebene. Es ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1,$$

woraus mit (1) die Darstellung $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. Das Residuum des Pols in $z = -n$ ergibt sich aus (1) zu

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} (\Gamma) = \lim_{z \to -n} \left((z+n) \cdot \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \right) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

□

Satz 2.9.2. *Für $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ gilt*

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Beweis. Für $\Re(z) > 0$ haben wir

$$|\Gamma(z)| \leq \int_0^\infty |t^{z-1}| e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{\Re(z)-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(\Re(z)).$$

Daher ist $\Gamma(z)$ in jedem Vertikalstreifen $\{z \colon \delta \leq \Re(z) \leq b\}$ mit $0 < \delta < b$ beschränkt. Aus der Rekursion

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

folgt dann, dass $\Gamma(z)$ auch auf jeder Menge der Gestalt

$$\{z \colon a < \Re(z) \leq b,\ |\Im(z)| \geq 1\} \tag{1}$$

beschränkt ist. Wir betrachten nun die Funktion

$$f(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

im Vertikalstreifen $V = \{z \colon 0 \leq \Re(z) \leq 2\}$.

In der Menge $V_1 = V \cap \{\Im(z) \geq 1\}$ der Gestalt (1) ist $f(z)$ beschränkt. Die Funktionen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

haben in den Stellen $z = 0, 1, 2$ Pole erster Ordnung mit denselben Residuen. Damit ist f im Vertikalstreifen V holomorph in V sogar beschränkt, da $V - V_1$ kompakt ist. Da f die Periode 2 besitzt ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph aber auch beschränkt und daher nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen $f(-z) = -f(z)$ bleibt nur $f(z) = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 2.9.3. *Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ hat keine Nullstellen, d.h. $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ist eine ganze Funktion.*

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 2.9.1 und 2.9.2. □

2.10 Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion und der Dirichletschen L- Reihen

Definition 2.10.1. Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo q. Wir setzen

$$\delta(\chi) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } q \neq 1, \\ 1, & \text{wenn } q = 1 \end{cases}$$

und $\kappa = \frac{1}{2} \cdot (1 - \chi(-1))$. Die Thetafunktion $\theta(y, \chi) \colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ ist durch

$$\theta(y, \chi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) n^{\kappa} \exp\left(-\pi n^2 \frac{y}{q}\right)$$

für $y > 0$ definiert. Für $a \in \mathbb{Z}$ sei

$$\theta(y, q, a) = \sum_{n \equiv a \bmod q} n^{\kappa} \exp\left(-\pi n^2 \frac{y}{q}\right)$$

und

$$\epsilon(\chi) = i^{-\kappa} \cdot \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}},$$

wobei $\tau(\chi)$ die Gaußsumme aus Definition 2.7.2 ist.

Satz 2.10.1. *Es sei $q > 1$ und χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo q. Die Funktion $\theta(y, \chi)$ erfüllt für $y > 0$ die Funktionalgleichung*

$$\theta(y, \chi) = \epsilon(\chi) y^{-\kappa - 1/2} \cdot \theta\left(y^{-1}, \overline{\chi}\right) \tag{1}$$

sowie die Abschätzungen

$$\theta(y, \chi) = O_q\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \tag{2}$$

für $y \to 0^+$ und

$$\theta(y, \chi) = O_q\left(e^{-\pi \frac{y}{q}}\right) \tag{3}$$

für $y \to \infty$.

Beweis. Wir beginnen mit der Berechnung der Fouriertransformierten $\hat{f}(n)$ von

$$f(x) = \exp\left(-\pi x^2 y/q\right)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\hat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi x^2 y/q\right) \cdot e(-xu)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi x^2 y/q - 2\pi i x u\right)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi y}{q} \cdot \left(x^2 + \frac{2iuq}{y} \cdot x\right)\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi y}{q} \cdot \left(\left(x + \frac{iuq}{y}\right)^2 + \left(\frac{uq}{y}\right)^2\right)\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi y}{q} \cdot \left(x + \frac{iuq}{y}\right)^2 - \frac{\pi q}{y} \cdot u^2\right) dx \\
&= \exp\left(-\pi u^2 \cdot \frac{q}{y}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi y}{q} \cdot \left(x + \frac{iuq}{y}\right)^2\right) dx \\
&= \exp\left(-\pi u^2 \cdot \frac{q}{y}\right) \cdot \int_{-\infty + iuq/y}^{\infty + iuq/y} \exp\left(-\pi x^2 \cdot \frac{y}{q}\right) dx \\
&= \exp\left(-\pi u^2 \cdot \frac{q}{y}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi x^2 \cdot \frac{y}{q}\right) dx = \sqrt{\frac{q}{y}} \cdot \exp\left(-\pi u^2 \cdot \frac{q}{y}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi z^2)\, dz \\
&= \sqrt{\frac{q}{y}} \cdot \exp\left(-\pi u^2 \cdot \frac{q}{y}\right)
\end{aligned}$$

mit dem Cauchyschen Integralsatz und der Substitution $z = \sqrt{\frac{y}{q}}x$.
Die Fouriertransformierte von

$$g(x) = x \cdot \exp\left(-\pi x^2 y/q\right)$$

ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\hat{g}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\pi x^2 y/q\right) \cdot e(-xu)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\pi x^2 y/q - 2\pi i x u\right)\, dx \\
&= \exp\left(-\pi u^2 \cdot \frac{q}{y}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{\pi y}{q} \cdot \left(x + \frac{iuq}{y}\right)^2\right) dx \\
&= \exp\left(-\pi u^2 \cdot \frac{q}{y}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(x + \frac{iuq}{y}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\pi y}{q} \cdot \left(x + \frac{iuq}{y}\right)^2\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{iuq}{y} \cdot \exp\left(-\frac{\pi y}{q} \cdot \left(x + \frac{iuq}{y}\right)^2\right)\right) dx \\
&= \exp\left(-\pi u^2 \cdot \frac{q}{y}\right) \cdot \left(\left[\frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{\pi y}{q} \cdot \left(x + \frac{iuq}{y}\right)^2\right)\right]_{-\infty}^{\infty}\right. \\
&\quad \left. - \frac{iuq}{y} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi y}{q} \cdot \left(x + \frac{iuq}{y}\right)^2\right) dx\right) \\
&= -\exp\left(-\pi u^2 \cdot \frac{q}{y}\right) \cdot \frac{iuq}{y} \cdot \int_{-\infty + iuq/y}^{\infty + iuq/y} \exp\left(-\pi x^2 \cdot \frac{y}{q}\right) dx = -iu\left(\frac{q}{y}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\pi u^2 \frac{q}{y}\right),
\end{aligned}$$

da das erste Integral verschwindet und das zweite mittels $\hat{f}(u)$ berechnet werden kann.

Wir können nun Satz 2.8.4 anwenden. Für $\kappa = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\theta(y,q,a) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\pi(qm+a)^2\frac{y}{q}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(qm+a) = \frac{1}{q}\cdot\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{m}{q}\right)\cdot e\left(\frac{am}{q}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{qy}}\cdot\sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\pi m^2 y^{-1} q^{-1}\right)\cdot e\left(\frac{am}{q}\right) = \frac{1}{\sqrt{qy}}\cdot\sum_{b \bmod q} e\left(\frac{ab}{q}\right)\theta\left(\frac{1}{y},q,b\right).
\end{aligned}$$

Für $\kappa = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\theta(y,q,a) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} (qm+u)\cdot\exp\left(-\pi(qm+a)^2\frac{y}{q}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g(qm+a) \\
&= \frac{1}{q}\cdot\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}\left(\frac{m}{q}\right)\cdot e\left(\frac{am}{q}\right) = i^{-\kappa}\left(\frac{q}{y}\right)^{3/2}\cdot\sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\pi m^2 y^{-1} q^{-1}\right)\cdot e\left(\frac{am}{q}\right) \\
&= i^{-\kappa} y^{-3/2} q^{-1/2}\cdot\sum_{b \bmod q} \exp\left(\frac{ab}{q}\right)\theta\left(\frac{1}{y},q,b\right).
\end{aligned}$$

Diese beiden Aussagen für $\kappa = 0$ und $\kappa = 1$ können wir zu

$$\theta(y,q,a) = i^{-\kappa} y^{-\kappa-1/2} q^{-1/2} \sum_{b \bmod q} e\left(\frac{ab}{q}\right)\theta\left(\frac{1}{y},q,b\right).$$

zusammenfassen. Wir haben dann

$$\begin{aligned}
\theta(y,\chi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) n^{\kappa}\cdot\exp\left(-\pi n^2\frac{y}{q}\right) = \sum_{a \bmod q} \chi(a)\cdot\theta(y,q,a) \\
&= i^{-\kappa} y^{-\kappa-1/2} q^{-1/2} \sum_{b \bmod q} \theta\left(y^{-1},q,b\right)\cdot\sum_{a \bmod q} \chi(a) e\left(\frac{ab}{q}\right).
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.7.4 (mit $\overline{\chi}$ statt χ) ist

$$\sum_{a \bmod q} \chi(a)\cdot e\left(\frac{ab}{q}\right) = \overline{\chi(b)}\tau(\chi).$$

Also gilt

$$\theta(y,\chi) = \epsilon(\chi) y^{-\kappa-1/2}\cdot\theta\left(y^{-1},\overline{\chi}\right),$$

d.h. die Aussage (1).
Es sei $z_n = -\log n + \pi n^2 \frac{y}{q}$. Wegen $\chi(0) = 0$ folgt

$$|\theta(y,\chi)| \leq 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-z_n).$$

Für $y \geq y_0$ gilt $z_{n+1} \geq z_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-z_n) \leq \exp(-z_1)\cdot\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}\right) = O_q\left(e^{-\frac{\pi y}{q}}\right),$$

also die Aussage (3).
Schließlich folgt daraus mittels der Funktionalgleichung (1) auch die Aussage (2). $\square$

Definition 2.10.2. Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 1$ sowie χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo q. Unter der vollständigen L- Reihe verstehen wir

$$\Lambda(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{s/2} \cdot \Gamma\left(\frac{s+\kappa}{2}\right) \cdot L(s,\chi).$$

Satz 2.10.2. *Es sei $q > 1$ und χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo q. Dann ist für $\sigma > 1$*

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\kappa/2} \Lambda(s,\chi) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \theta(y,\chi) y^{\frac{s+\kappa}{2}-1}\, dy.$$

Beweis. Es sei $\sigma > 1$ und $M > 1$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von

$$\sum_{n=-N}^{N} \chi(n) n^\kappa \exp\left(-\pi n^2 \frac{y}{q}\right)$$

gegen $\theta(y,\chi)$ auf $[M^{-1}, M]$ gilt

$$\int_{M^{-1}}^{M} \theta(y,\chi) y^{\frac{s+\kappa}{2}-1}\, dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) n^\kappa \int_{M^{-1}}^{M} \exp\left(-\pi n^2 \frac{y}{q}\right) y^{\frac{s+\kappa}{2}} \frac{dy}{y}. \tag{1}$$

Aus den Schranken $\theta(y,\chi) = O_q(y^{-\frac{1}{2}})$ für $y \to 0^+$ bzw. $\theta(y,\chi) = O_q(\exp(-\pi y/q)$ für $y \to \infty$ folgt

$$\lim_{m\to\infty} \int_{M^{-1}}^{M} y^{\frac{s+\kappa}{2}} \theta(y,\chi) \frac{dy}{y} = \int_0^\infty y^{\frac{s+\kappa}{2}} \theta(y,\chi) \frac{dy}{y}. \tag{2}$$

Wir führen nun den Grenzübergang auf der rechten Seite von (1) im Integral aus:
Es sei $\delta = \delta(\sigma)$ so gewählt, dass $\frac{1}{2}(\sigma+\kappa)(2-\delta) > 1$ ist, was wegen $\sigma > 1$ auch möglich ist. Nun schätzen wir

$$\int_0^{M^{-1}} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} e^{-\pi n^2 \frac{y}{q}}\, dy$$

ab. Für $1 \leq \eta \leq M^{\frac{1}{2-\delta}}$ erhalten wir

$$\int_0^{M^{-1}} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} e^{-\pi n^2 \frac{y}{q}}\, dy \leq M^{-1} \cdot M^{-\left(\frac{1}{2}(\sigma+\kappa)-1\right)} = O\left(M^{-\frac{1}{2}(\sigma+\kappa)}\right),$$

und damit

$$\sum_{n \leq M^{1/(2-\delta)}} \left| \int_0^{M^{-1}} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\pi n^2 \frac{y}{q}\right)\, dy \right| = O_\sigma\left(M^{\frac{1}{2-\delta}-\frac{1}{2}(\sigma+\kappa)}\right) \to 0 \tag{3}$$

für $M \to \infty$ wegen $\frac{1}{2-\delta} - \frac{\sigma}{2} < 0$. Für $n > M^{\frac{1}{2-\delta}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{M^{-1}} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\pi n^2 \frac{y}{q}\right)\, dy \right| &\leq \left| \int_0^{n^{-(2-\delta)}} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\pi n^2 \frac{y}{q}\right)\, dy \right| \\
&\quad + \left| \int_{n^{-(2-\delta)}}^{M^{-1}} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\pi n^2 \frac{y}{q}\right)\, dy \right| \\
&= O_\sigma\left(n^{-(2-\delta)\frac{\sigma+\kappa}{2}}\right) + O_\sigma\left(\exp\left(-\frac{n^\delta}{q}\right) M^{-\frac{1}{2}(\sigma+\kappa)}\right)
\end{aligned}$$

durch Abschätzung der Faktoren der Integranden. Es folgt

$$\sum_{n>M^{\frac{1}{2-\delta}}} \left(\int_0^{M^{-1}} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\pi n^2 \frac{y}{q}\right) dy \right) \to 0 \tag{4}$$

für $M \to \infty$. Weiter strebt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_M^{\infty} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\frac{n^2 \pi y}{q}\right) dy = O_\sigma\left(M^{\frac{\sigma+\kappa}{2}} e^{-\pi \frac{M}{q}}\right) \tag{5}$$

gegen null für $M \to \infty$. Aus (3), (4) und (5) folgt

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M^{-1}}^{M} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\frac{n^2\pi y}{q}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\frac{n^2\pi y}{q}\right) dy. \tag{6}$$

Ebenso zeigt man

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{-\infty<n\leq -1} \int_{M^{-1}}^{M} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\frac{n^2\pi y}{q}\right) dy = \sum_{-\infty<n\leq -1} \int_0^{\infty} y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-\frac{n^2\pi y}{q}\right) dy. \tag{7}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^{\frac{s+\kappa}{2}-1}\theta(y,\chi)\,dy &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) n^\kappa \int_0^\infty y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-n^2\pi\frac{y}{q}\right) dy \\
&= (1+\chi(-1)(-1)^\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^\kappa \int_0^\infty y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-n^2\pi\frac{y}{q}\right) dy \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^\kappa \int_0^\infty y^{\frac{s+\kappa}{2}-1} \exp\left(-n^2\pi\frac{y}{q}\right) dy \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q}{\pi n^2} \chi(n) n^\kappa \int_0^\infty e^t t^{\frac{s+\kappa}{2}-1}\,dt \cdot n^{-(s+\kappa)} n^2 \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+\kappa}{2}} \\
&= 2\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+\kappa}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\kappa}{2}\right) L(s,\chi) = 2\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{\kappa}{2}} \Lambda(s,\chi),
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Satz 2.10.3. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 1$ und χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo q. Dann kann $L(s,\chi)$ zu einer ganzen Funktion analytisch fortgesetzt werden. Die vollständige L- Reihe $\Lambda(s,\chi)$ erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\Lambda(s,\chi) = \epsilon(\chi) \cdot \Lambda(1-s,\overline{\chi}).$$

Beweis. Nach Satz 2.6.3 ii) ist $L(s,\chi)$ für $\sigma > 0$ holomorph. Wegen der Schranken

$$\theta(y,\chi) = O_q\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

für $y \to 0^+$ und

$$\theta(y,\chi) = O_q\left(e^{-\pi y/q}\right)$$

für $y \to \infty$ von Satz 2.10.1 ist die Folge

$$\int_{M^{-1}}^{M} \theta(y,\chi) y^{\frac{s+\kappa}{2}-1}\, dy$$

mit $M \in \mathbb{N}$ in $\sigma > 0$ kompakt konvergent. Somit ist

$$I(s,\chi) := \int_0^\infty \theta(y,\chi) y^{\frac{s+\kappa}{2}-1}\, dy$$

in $\sigma > 0$ holomorph. Aus der Funktionalgleichung

$$\theta(y,\chi) = \epsilon(\chi) y^{-\kappa-\frac{1}{2}} \theta(y^{-1}, \overline{\chi})$$

von Satz 2.10.1 ergibt sich mit der Substitution $u = \frac{1}{y}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \theta(y,\chi) y^{\frac{s+\kappa}{2}-1}\, dy &= \epsilon(\chi) \int_0^1 y^{s/2-\kappa/2-3/2} \theta(y^{-1}, \overline{\chi})\, dy \\
&= \epsilon(\chi) \int_1^\infty u^{3/2+\kappa/2-s/2} u^{-2} \theta(u, \overline{\chi})\, du \\
&= \epsilon(\chi) \int_1^\infty u^{(1-s+\kappa)/2} \theta(u, \overline{\chi})\, du.
\end{aligned}$$

Damit haben wir für $\sigma > 0$

$$I(s,\chi) = \int_1^\infty f(y,\chi)\, dy$$

mit

$$f(y,\chi) = \frac{1}{y} \cdot \left(\epsilon(\chi) y^{(1-s+\kappa)/2} \theta(y, \overline{\chi}) + \theta(y, \overline{\chi}) y^{\frac{s+\kappa}{2}} \right).$$

Wegen $|\theta(y,\chi)| = |\theta(y,\overline{\chi})| = O(e^{-\pi y/q})$ für $y \to \infty$ konvergiert die Folge

$$\int_{-M}^{M} f(y,\chi)\, dy$$

mit $M \in \mathbb{N}$ kompakt auf $\mathbb{C}$, womit $I(s,\chi)$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist. Wir haben

$$\overline{\epsilon(\chi)} I(1-s,\chi) \int_1^\infty \left(\overline{\epsilon(\chi)} \epsilon(\chi) y^{s+\kappa/2} \theta(y,\chi) + \overline{\epsilon(\chi)} \theta(y,\chi) y^{\frac{s+\kappa}{2}} \right) \frac{dy}{y} = \overline{I(s,\chi)} = I(s,\overline{\chi}). \qquad (*)$$

Nach Satz 2.10.2 folgt mittels Anwendung von $(*)$ mit $\overline{\chi}$ anstelle von χ:

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\kappa/2} \Lambda(s,\chi) = \frac{1}{2} I(s,\chi) = \frac{1}{2} \epsilon(\chi) I(1-s, \overline{\chi}) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\kappa/2} \epsilon(\chi) \Lambda(1-s, \overline{\chi}).$$

Da die Γ- Funktion keine Nullstellen besitzt, ist auch $L(s,\chi)$ eine ganze Funktion. □

Definition 2.10.3. Die <u>vollständige Zeta- Funktion</u> ist durch $\xi(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s)$ definiert.

Satz 2.10.4. *Die vollständige Zeta- Funktion $\xi(s)$ kann in die gesamte komplexe Ebene $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt werden. Ihre einzigen Singularitäten sind Pole erster Ordnung in $s = 0$ und $s = 1$. Die <u>vollständige Zeta- Funktion</u> erfüllt die Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$.*

Beweis. Die Grundideen sind schon im Beweis von Satz 2.10.2 enthalten. Wegen des Pols in $s = 1$ sind jedoch kleine Änderungen notwendig. An die Stelle von $\theta(y, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n)e(-\pi n \frac{y}{q})$ tritt die Theta- Reihe

$$\theta(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(-\pi n^2 y).$$

Wegen $e(-\pi 0^2 y) = 1$ können die Schranken $\theta(y, \chi) = O_q(e^{-\pi/q})$ für $y \to \infty$ nicht auf $\theta(y)$ übertragen werden. Eine solche Schranke gilt jedoch für $\psi(y) = \frac{1}{2}(\theta(y) - 1)$, nämlich

$$\psi(y) = O\left(e^{-\pi y}\right)$$

für $y \to \infty$. An die Stelle der Gleichung

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\kappa/2} \Lambda(s, \chi) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \theta(y, \chi) y^{\frac{s+\kappa}{2} - 1}\, dy.$$

tritt die Gleichung

$$\xi(s) = \int_0^\infty \psi(y) y^{s/2-1}\, dy. \tag{1}$$

Anwendung der Poissonschen Summenformel auf $\theta(y)$ ergibt die Funktionalgleichung

$$\vartheta(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \vartheta\left(\frac{1}{y}\right)$$

für $y > 0$, woraus die Funktionalgleichung

$$2\psi(y) + 1 = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \left(2\psi\left(\frac{1}{y}\right) + 1\right) \tag{2}$$

folgt. Gleichung (1) wird aufgespalten

$$\zeta(s) = \int_0^1 \psi(y) y^{s/2-1}\, dy + \int_1^\infty \psi(y) y^{s/2-1}\, dy,$$

und in das erste Integral wird die Funktionalgleichung (2) eingesetzt. □

Es bleibt noch der Fall nicht primitiver Charaktere zu betrachten.

Satz 2.10.5. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 1$, $q^*|q$ und $\chi = \chi_0\chi^*$ mit dem Hauptcharakter χ_0* mod q *und den primitiven Charakteren χ^** mod q^**. Dann haben wir*

$$L(s, \chi) = L(s, \chi^*) \cdot \prod_{p|q} (1 - \chi^*(p)p^{-s}).$$

Beweis. Nach Satz 2.6.1 haben wir für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} = \prod_p (1 - \chi^*(p)p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{p:\, \chi(p)=0} (1 - \chi^*(p)p^{-s}) \\ &= L(s, \chi^*) \cdot \prod_{p|q} (1 - \chi^*(p)p^{-s}) \end{aligned}$$

□

Satz 2.10.6. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 1$, $q^*|q$ und $\chi = \chi_0\chi^*$ mit dem Hauptcharakter χ_0* mod q *und den primitiven Charakteren χ^** mod q^**. Dann kann $L(s, \chi)$ meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgestzt werden. Ist $q^* > 1$, so ist $L(s, \chi)$ auf $\mathbb{C}$ holomorph. Ist $q^* = 1$, so ist die einzige Singularität von $L(s, \chi)$ ein Pol erster Ordnung in $s = 1$.*

Beweis. ohne Beweis. □

2.11 Die Koeffizientensumme einer Dirichletreihe

Entscheidend für den funktionentheoretischen Beweis des Primzahlsatzes ist die Möglichkeit, die Koeffizientensummen von Dirichletreihen durch Kurvenintegrale auszudrücken, die wir hier behandeln wollen.

Satz 2.11.1. *Es sei*

$$D(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$$

für $\sigma>1$ absolut konvergent. Mit einer für $x\geq x_0$ monoton wachsenden und positiven Funktion $\Phi(x)$ und einer Konstanten $C>0$ sei $|a_n|<C\cdot\Phi(x)$ für alle $n\leq x$. Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma}=O\left((\sigma-1)^{-\alpha}\right)$$

für $\sigma\to 1^+$ und für ein festes $\alpha>0$ sowie $c>1$, $x>1$, $x\notin\mathbb{Z}$ sowie $T>0$. Dann gilt

$$\sum_{n\leq x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}D(s)\frac{x^s}{s}\,ds+O\left(\frac{x^c}{T\cdot(\sigma-1)^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{x\cdot\Phi(2x)\cdot\log(2x)}{T}\right)+O\left(\frac{x\cdot\Phi(2x)}{T\cdot\|x\|}\right)$$

für $T\to\infty$, wobei $\|x\|$ den Abstand von x zur nächsten ganzen Zahl bedeute.

Zur Vorbereitung beweisen wir

Satz 2.11.2. *(Perronsche Formel)*
Es sei $c>0$, $T>0$ und $y>0$. Dann gilt für $T\to\infty$

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}\,ds=\begin{cases}1+O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right), & \text{falls } y>1\\ O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right) & \text{falls } 0<y<1.\end{cases}$$

Beweis. Es sei $y>1$. Für $U>0$ ist nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-U-iT}^{c-iT}\frac{y^s}{s}\,ds+\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}\,ds+\int_{c+iT}^{-U+iT}\frac{y^s}{s}\,ds+\int_{-U+iT}^{-U-iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right)=\mathrm{Res}_{s=0}\left(\frac{y^s}{s}\right)=1,$$

wenn im positiven Sinn über die geradlinigen Verbindungsstrecken integriert wird. Es ist

$$\left|\int_{c+iT}^{-U+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right|\leq\frac{1}{T}\cdot\int_{-\infty}^{c}y^{\sigma}\,d\sigma=O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)$$

und analog

$$\left|\int_{-U-iT}^{c-iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right|=O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right).$$

bzw.

$$\left|\int_{-U-iT}^{-U+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right|=O(Ty^{-U})\underset{U\to\infty}{\to}0.$$

Also ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}\,ds=1+O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right).$$

Es sei $0 < y < 1$. Für $U > 0$ ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{U-iT}^{c-iT}\frac{y^s}{s}\,ds + \int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}\,ds + \int_{c+iT}^{U+iT}\frac{y^s}{s}\,ds + \int_{U+iT}^{U-iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right) = 0,$$

wobei wiederum über die geradlinigen Verbindungsstrecken integriert wird. Es ist

$$\begin{aligned}
\left|\int_{c+iT}^{U+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right| &\leq \frac{1}{T}\int_c^\infty y^\sigma\,d\sigma = O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)\\
\left|\int_{U-iT}^{c-iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right| &= O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)\\
\left|\int_{U-iT}^{U+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right| &= O\left(\frac{T\cdot y^U}{|\log(y)|}\right) \underset{U\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Beweis. (Beweis von Satz 2.11.1)
Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

auf $[c-iT, c+iT]$ erhalten wir mit der Perronschen Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} D(s)\frac{x^s}{s}\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\,ds\right) = \sum_{n<x} a_n + O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\right). \quad (1)$$

Wir spalten die Summe

$$\Sigma_0 := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c\cdot\log|(\frac{x}{n})|}$$

in $\Sigma_0 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ mit

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sum_{n<\frac{x}{2}}\frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\\
\Sigma_2 &= \sum_{n>2x}\frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\\
\Sigma_3 &= \sum_{\frac{x}{2}\leq n\leq 2x}\frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}
\end{aligned}$$

auf. Für $n < \frac{x}{2}$ und $n > 2x$ ist $|\log(\frac{x}{n})| \geq \log(2)$, also

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = O\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c}\right) = O\left((c-1)^{-\alpha}\right) \quad (2)$$

nach Voraussetzung. Wir kommen zum schwierigsten Teil, der Abschätzung von Σ_3. Es sei N eine natürliche Zahl, die x am nächsten liegt. Für $N < n \leq 2x$ sei $r = n - N$. Wir haben wegen $x \leq N + \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\log\left(\frac{n}{x}\right) \geq \log\left(\frac{N+r}{N+\frac{1}{2}}\right) = \log\left(1 + \frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}\right).$$

Im folgenden seien $c_0 > 0$ und $c_1 > 0$ feste Konstanten. Aus dem Mittelwertsatz schließen wir, dass $\log(1+u) \geq c_0 u$ für $0 \leq u \leq 1$ ist und erhalten

$$\log\left(1 + \frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}\right) \geq c_0 \frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}} \geq c_1 \cdot \frac{r}{x}.$$

Also haben wir

$$\sum_{N<n\leq 2x} \frac{|a_n|}{n^c \cdot |\log(\frac{x}{n})|} = O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \sum_{1\leq r\leq 2x} \frac{1}{r}\right) = O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \log(2x)\right). \tag{3}$$

Analog folgt

$$\sum_{\frac{x}{2}\leq n<N} \frac{|a_n|}{n^c \cdot |\log(\frac{x}{n})|} = O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \log(2x)\right). \tag{4}$$

Für $n = N$ erhalten wir

$$\frac{|a_n|}{N^c \cdot |\log(\frac{x}{N})|} = O\left(\frac{\Phi(N)}{N^c \cdot |\log(1+\frac{x-N}{N})|}\right) = O\left(\frac{\Phi(2x)\cdot x^{1-c}}{\|x\|}\right). \tag{5}$$

Aus den Abschätzungen (1) bis (5) folgt die Behauptung des Satzes. □

2.12 Der Primzahlsatz und der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen

Wir wollen in diesem Abschnitt eine schärfere Version des Primzahlsatzes

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

beweisen. Der Beweis benützt analytische Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$.
Eine noch allgemeinere Fragestellung ist die Verteilung der Primzahlen auf arithmetischen Progressionen $a \bmod q$, die eng mit den Eigenschaften der Dirichletschen L- Reihen $L(s,\chi)$ mit den Dirichletcharakteren $\chi \bmod q$ zusammenhängt.
Die Überlegungen, die zum Beweis des Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen führen, können weitgehend durch nur leichte Abänderung der entsprechenden Überlegungen für den Beweis des Primzahlsatzes gewonnen werden. Eine Ausnahme bildet der Nachweis der grundlegenden Tatsache $L(1,\chi) \neq 0$ für $\chi \neq \chi_0$.

Definition 2.12.1. Es seien $a, q \in \mathbb{N}$ und $x \geq 1$. Wir setzen

$$\pi(x,q,a) = \sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv a \bmod q}} 1,$$

die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich x in der arithmetischen Progression $a \bmod q$.

Definition 2.12.2. Die Funktion $\Lambda\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^m \text{ für eine Primzahl } p \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

heißt <u>von- Mangoldtsche- Funktion</u>. Die summatorischen Funktionen

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \quad \text{bzw.} \quad \vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p$$

heißen <u>Tschebyscheffsche ψ- Funktion</u> bzw. <u>Tschebyscheffsche ϑ- Funktion</u>.

Für den Fall der arithmetischen Progressionen führen wir folgende Verallgemeinerungen ein:

Definition 2.12.3. Es seien $a, q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Wir setzen

$$\begin{aligned} \psi(x,q,a) &= \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) \\ \psi(x,\chi) &= \sum_{n \le x} \chi(n)\Lambda(n) \\ \vartheta(x,q,a) &= \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \bmod q}} \log p. \end{aligned}$$

Satz 2.12.1. *(i) Es ist $\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2}(\log x)^2)$.*
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$ für $x \to \infty$ (Primzahlsatz)
(b) $\psi(x) = x + o(x)$ für $x \to \infty$
(c) $\vartheta(x) = x + o(x)$ für $x \to \infty$.

(ii) Es seien $a, q \in \mathbb{N}$. Es ist $\psi(x,q,a) = \vartheta(x,q,a) + O(x^{1/2}(\log x)^2)$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\pi(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$ für $x \to \infty$ (Primzahlsatz für arithmetische Progressionen)
(b) $\psi(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot x + o(x)$ für $x \to \infty$
(c) $\vartheta(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot x + o(x)$ für $x \to \infty$.

Beweis. Der Teil (i) ist ein Spezialfall von (ii). Daher genügt es, (ii) zu beweisen.
Es gilt

$$\psi(x,q,a) - \vartheta(x,q,a) = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\substack{p^m \le x \\ p^m \equiv a \bmod q}} \log p \le (x^{1/2} + \ldots + x^{1/k_0}) \log x,$$

wobei k_0 so gewählt ist, dass $\frac{1}{2} < x^{1/k_0} \le 2$ ist. Es ist $k_0 = O(\log x)$ für $x \to \infty$. Also folgt

$$\psi(x,q,a) - \vartheta(x,q,a) = O(x^{1/2}(\log x)^2),$$

woraus sofort $a) \Leftrightarrow b)$ folgt.
Es bleibt also noch $a) \Leftrightarrow c)$ zu zeigen.
$a) \Rightarrow c)$:
Mit Abelscher partieller Summation (Satz 1.3.1) ist

$$\vartheta(x,q,a) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \bmod q}} \log p = \pi(x,q,a)\log x - \int_{1/2}^{x} \frac{\pi(t,q,a)}{t}\, dt.$$

Es ist

$$\int_{1/2}^{x} \frac{\pi(t,q,a)}{t}\, dt = \int_{3/2}^{x} \frac{\pi(t,q,a)}{t}\, dt \le \int_{3/2}^{x^{1/2}} \frac{\pi(t,q,a)}{t}\, dt + O\left(\int_{x^{1/2}}^{x} \frac{\pi(t,q,a)}{t}\, dt\right) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Also folgt $\vartheta(x,q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + o(x)$ aus a).

c) $\Rightarrow$ *a)*:
Wiederum gilt mit Abelscher partieller Summation

$$\pi(x,q,a) = \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv a \bmod q}} \frac{\log p}{\log p} = \frac{\vartheta(x,q,a)}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \frac{\vartheta(t,q,a)}{t(\log t)^2}\,dt = \frac{\vartheta(x,q,a)}{\log x} + O\left(\int_{3/2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2}\right).$$

Dabei ist

$$\int_{3/2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2} = \int_{1/2}^{x^{1/2}} \frac{dt}{(\log t)^2} + \int_{x^{1/2}}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2} = O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

□

Satz 2.12.2. *(i) Für $\sigma > 1$ gilt*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.$$

(ii) Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Dann gilt für $\sigma > 1$

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n) n^{-s}.$$

Beweis. Teil (i) ist der Spezialfall $q = 1$ von (ii). Es genügt daher wieder, (ii) zu beweisen.
Wir betrachten das Eulerprodukt

$$L(s,\chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$$

zunächst für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$. Es sei Log die auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ definierte holomorphe Funktion, die für $s \in (0,\infty)$ die Bedingung $\mathrm{Log} s = \log s$ erfüllt. Es existiert ein s_0, so dass für alle $s \ge s_0$

$$\sum_p |\arg(1 - \chi(p)p^{-s})| < \pi$$

gilt. Aus dem Eulerprodukt folgt für $s \ge s_0$

$$\mathrm{Log}\ L(s,\chi) = -\sum_p \log(1 - \chi(p)p^{-s}).$$

Differenzieren ergibt

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_p \frac{\chi(p)(\log p)p^{-s}}{1-\chi(p)p^{-s}} = -\sum_p \chi(p)p^{-s}\log p \sum_{m=0}^{\infty} \chi(p)^m p^{-ms} = -\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \chi(p^m)\log p (p^m)^{-s}.$$

Nach dem großen Umordnungssatz ist

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}$$

für $s \in [s_0, \infty)$.
Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen gilt dies aber für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma > 1$. □

Satz 2.12.3. *Es sei $a, q \in \mathbb{N}$ mit $(a, q) = 1$ sowie χ_0 der Hauptcharakter.*

(i) Es ist $\psi(x, q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \psi(x, \chi)$.

(ii) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\psi(x, q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + o(x)$ *für alle* a *mit* $(a, q) = 1$.

(b) $\psi(x) = x + o(x)$ *und* $\psi(x, \chi) = o(x)$ *für alle* $\chi \neq \chi_0$.

Beweis. (i) Nach den Orthogonalitätsrelationen 2. Art (Satz 1.2.5 (ii)) gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \psi(x, \chi) &= \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n) \\
&= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \chi(n) \right) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) \\
&= \psi(x, q, a).
\end{aligned}$$

(ii) *a)* $\Rightarrow$ *b)*:
Es gelte $\psi(x, q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + o(x)$ für alle a mit $(a, q) = 1$.
Dann ist $\psi(x) = \sum_{(a,q)=1} \psi(x, q, a) + O(1) = x + o(x)$ und

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n) = \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ a \bmod q}} \chi(a) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) + O(1) = \frac{x}{\varphi(q)} \sum_{a \bmod q} \overline{\chi(q)} + o(x) = o(x).$$

b) $\Rightarrow$ *a)*:
Es sei $\psi(x) = x + o(x)$ und $\psi(x, \chi) = o(x)$ für $\chi \neq \chi_0$. Dann gilt für $(a, q) = 1$

$$\begin{aligned}
\psi(x, q, a) &= \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \chi(n) \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{n \leq x} \chi_0(n) \Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(a)} \psi(x, \chi) = \frac{x}{\varphi(q)} + o(x).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.12.1. Satz 2.12.3 (ii) ist im wesentlichen das Gleichverteilungskriterium (Satz 1.3.1) für die Folge ($p_j \bmod q$) auf der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$, wobei p_j die j- te Primzahl mit $p_j \nmid q$ ist. Anstelle der Folge ($p_j \bmod q$) betrachtet man die mit Gewichten $\log p_j$ versehene Folge ($p_j \bmod q$), die noch durch die $n = p^m$ mit $m > 1$ leicht verändert wird.

Wir wenden nun Satz 2.11.1 über die Koeffizientensumme einer Dirichletreihe auf die Dirichletreihe

$$D(s) = -\frac{Ł'(s, \chi)}{Ł(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s}$$

an, deren Koeffizientensumme gerade $\psi(x, \chi)$ ist.

In Zukunft schreiben wir bei den logarithmischen Ableitungen $\frac{L'}{L}$ bzw. $\frac{\zeta'}{\zeta}$ die Argumente (s,χ) nur noch einmal.
Wir werden den Primzahlsatz für arithmetische Progressionen

$$\psi(x,q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)}$$

mit einem schärferen Restglied beweisen, was auch ein schärferes Restglied im Primzahlsatz für $\pi(x,q,a)$ zur Folge hat. Dabei muss nun allerdings die einfache Näherungsfunktion $\frac{x}{\log x}$ durch den Integrallogarithmus

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

ersetzt werden. Obwohl im einfachen Primzahlsatz für arithmetische Progressionen eine Abhängigkeit der im O- Term impliziten Konstanten von q zugelassen wäre, wollen wir im Hinblick auf spätere Anwendungen darauf verzichten.

Satz 2.12.4. *Es sei $x = m + \frac{1}{2}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $c = c(x) = 1 + \frac{1}{\log x}$. Dann ist*

$$\psi(x,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x\cdot\log x^2}{T}\right).$$

Die im O- Term implizierte Konstante ist von q unabhängig.

Beweis. Wir wenden Satz 2.11.1 mit $a_n = \chi(n)\Lambda(n)$ auf

$$D(s) = -\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)n^{-s}$$

mit der Koeffizientenbeschränkung $\Phi(x) = \log x$ an. Für $\sigma > 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = O\left((\sigma-1)^{-1}\right)$$

für $\sigma \to 1^+$, da $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ in $s=1$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Es kann also $\alpha = 1$ im Satz 2.11.1 gewählt werden. Die drei Restglieder des Satzes sind alle durch

$$O\left(\frac{x\cdot\log(x)^2}{T}\right)$$

beschränkt. □

Wir werden im folgenden den Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ zu einer geschlossenen Kurve ergänzen, die ein Rechteck R im positiven Sinne berandet, und zwar zur Kurve

$$\gamma = [c-iT, c+iT] \cup [c+iT, a+iT] \cup [a+iT, a-iT] \cup [a-iT, c-iT]$$

für $a < 1 < c$. Im Falle $\chi \neq \chi_0$ wird der Integrand $-\frac{L'}{L}(s,\chi)\frac{x^s}{s}$ eine Singularität im Inneren des Rechtecks R haben. Im Falle $\chi = \chi_0$ wird die einzige Singularität des Integranden $-\frac{L}{L}(s,\chi_0)\cdot\frac{x^s}{s}$ im Inneren des Rechtecks R der Pol in $s=1$ sein. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}\,ds$$

wird dann durch den Residuensatz ausgewertet. Dazu muss sichergestellt werden, dass $L(s,\chi)$ im Inneren von R keine Nullstellen besitzt, d.h. zum Beweis des Primzahlsatzes benötigt man die Existenz einer nullstellenfreien Zone, welche wir im folgenden diskutieren wollen.

Wir wissen nach Satz 2.1.1, dass $\zeta(s)$ und nach Satz 2.6.1, dass auch $L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma > 1$ gilt. Entscheidend für den Beweis des Primzahlsatzes durch Hadamard und de la Vallée-Poussin im Jahre 1896 war die Tatsache, dass $\zeta(s)$ auch auf der Geraden $\sigma = 1$ keine Nullstellen besitzt. Diese Tatsache reicht für den Beweis des Primzahlsatzes aus, liefert jedoch nur die Asymptotik. Der Beweis für $\zeta(1+it) \neq 0$ beinhaltet jedoch auch die Grundidee für den Beweis des Primzahlsatzes.

Definition 2.12.4. Es sei χ_0 der Hauptcharakter. Dann sei

$$E(q,\chi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \chi = \chi_0 \\ 0, & \text{wenn } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

Satz 2.12.5. *Es sei $q \in \mathbb{N}$, χ ein Dirichletcharakter modulo q und $M \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma > -M$*

$$L(s,\chi) - E(q,\chi) \cdot \frac{\varphi(q)}{q(s-1)} = O_M\left(|s|^{M+1} \cdot q^{M+2}\right).$$

Beweis. Aus der Eulerschen Summenformel (Satz 2.3.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (qm+a)^{-s} &= \int_0^\infty (qu+a)^{-s}\,du - qs\int_0^\infty (qu+a)^{-s-1}P_0(u)\,du - \frac{1}{2}\cdot a^{-s} \\ &= \frac{a^{-s+1}}{s-1} - \frac{a^{-s}}{2} - qs\int_0^\infty (qu+a)^{-s-1}P_0(u)\,du. \end{aligned}$$

Wir definieren die Funktionen P_l für $l \in \mathbb{N}$ durch $P_{l+1}'(u) = P_l(u)$ sowie

$$\int_0^1 P_l(u)\,du = 0$$

und erhalten durch wiederholte partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (qu+a)^{-s-1}P_0(u)\,du &= \left[\frac{1}{2}\cdot q(s+1)(qu+a)^{-s-2}\right]_0^\infty - \sum_{l=2}^{\infty} l!\cdot P_l(0)\cdot q^l \cdot a^{-s-l-1} \\ &\quad + q^M\cdot(s+1)\cdots(s+M)\cdot\int_0^\infty (qu+a)^{-s-M-1}\,du, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (qm+a)^{-s} &= \frac{a^{-s-1}}{1-s} - \frac{a^{-s}}{2} - \sum_{l=2}^{M-1} l!\cdot P_l(0)\cdot q^l\cdot a^{-s-l} \\ &\quad + q^{M+1}\cdot s\cdot(s+1)\cdots(s+M)\cdot\int_0^\infty (qu+a)^{-s-M-1}P_M(u)\,du, \end{aligned}$$

wobei

$$H(s) := \int_0^\infty (qu+a)^{-s-M-1}P_M(u)\,du$$

eine für $\Re(s) > -M$ holomorphe Funktion darstellt. Wir erhalten

$$\sum_{m=0}^{\infty} (qm+a)^{-s} - \frac{a^{-s-1}}{s-1} = O_M\left(q^{M+1}\cdot|s|^{M+1}\right).$$

Wegen

$$\sum_{a=1}^{q} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{für } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{für } \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

erhalten wir

$$\sum_{a=1}^{q} \chi(a) \cdot \frac{a^{-s+1}}{s-1} = E(q,\chi) \cdot \frac{\varphi(q)}{s-1} + h(q,\chi,s)$$

mit

$$E(q,\chi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{für } \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

und einer holomorphen Funktion $h(q,\chi,s)$ mit $h(q,\chi,s) = O\left(q^{M+2}\right)$. Insgesamt erhalten wir für $\Re(s) > -M$

$$L(s,\chi) - E(q,\chi) \cdot \frac{\varphi(q)}{q(s-1)} = O_M\left(|s|^{M+1} \cdot q^{M+2}\right),$$

also die Behauptung. □

Satz 2.12.6. *(Borel-Carathéodory)*
Die Funktion f sei auf einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s| \leq R$ enthält, holomorph. Es sei $f(0) = 0$ und $\Re(f(s)) \leq M$ für alle $|s| \leq R$. Für $|s| \leq r < R$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq \frac{2Mr}{R-r} \\ |f'(s)| &\leq \frac{2MR}{(R-r)^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{2M}{R^k} \tag{1}$$

für alle $k \geq 1$. Die Substitution $s = R \cdot e(\theta)$ ergibt mittels der Cauchyschen Integralformel

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))\, d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) \frac{ds}{s} = f(0) = 0. \tag{2}$$

Für $k > 0$ haben wir

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta)) e(k\theta)\, d\theta = \frac{R^{-k}}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) s^{k-1}\, ds = 0 \tag{3}$$

und

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta)) e(-k\theta)\, d\theta = \frac{R^k}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) s^{-k-1}\, ds = \frac{R^k f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{4}$$

Indem wir eine Linearkombination von (2),(3) und (4) bilden, erhalten wir für beliebige $\phi \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))(1 + \cos(2\pi(k\theta + \phi)))\, d\theta = \frac{R^k \cdot e(-\phi) \cdot f^{(k)}(0)}{2k!}$$

und

$$\Re\left(\frac{\frac{1}{2} R^k \cdot e(-\phi) \cdot f^{(k)}(0)}{k!} \right) \leq M \int_0^1 (1 + \cos(2\pi(k\theta + \phi)))\, d\theta = M \tag{5}$$

für alle $k > 0$.

Wir wählen ϕ so, dass $e(-\phi)f^{(k)}(0) = |f^{(k)}(0)|$ ist. Die Gleichung (1) folgt dann aus (5). Aus (1) folgt weiter

$$|f(s)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| r^k \leq 2M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k = \frac{2Mr}{R-r}$$

sowie

$$|f'(s)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|kr^{k-1}}{k!} \leq \frac{2M}{R} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} = \frac{2MR}{(R-r)^2}.$$

□

Bemerkung 2.12.2. Zum besseren Verständnis der folgenden Sätze ist folgende Vorbetrachtung nützlich: Es sei f ein Polynom mit (möglicherweise mehrfachen) Nullstellen $\varrho_1, \dots, \varrho_m$, d.h. es gelte $f(s) = c(s-\varrho_1)\cdots(s-\varrho_m)$. Differenzieren des Logarithmus ergibt

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{s-\varrho}. \tag{$*$}$$

Es sei nun eine Kreisscheibe $|s-s_0| < \frac{r}{2}$ gegeben, so dass $|s_0 - \varrho_j| \leq \frac{r}{2}$ für $1 \leq j \leq k$ und $|s_0 - \varrho_j| > \frac{r}{2}$ für $k+1 \leq j \leq m$ gilt. Dann folgt aus $(*)$ für $|s-s_0| \leq \frac{r}{4}$

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{s-\varrho_j}\right| \leq \frac{4(m-k)}{r}.$$

Nun lässt sich dieses Ergebnis auf Funktionen verallgemeinern, die nicht notwendigerweise Polynome sind und möglicherweise auch unendlich viele Nullstellen haben. Der nächste Satz gibt eine teilweise Antwort unter gewissen Bedingungen.

Satz 2.12.7. *Es sei f holomorph in einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s-s_0| \leq r$ umfasst. Es sei $M > 1$ so gewählt, dass*

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M$$

auf der Kreisscheibe $|s-s_0| \leq r$ erfüllt ist. Dann gilt mit einer absoluten Konstante $A > 0$

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho}\right| < \frac{A \cdot M}{r}$$

für $|s-s_0| \leq \frac{r}{4}$, wobei ϱ alle Nullstellen von f mit $|\varrho - s_0| \leq \frac{r}{2}$ entsprechend ihrer Vielfachheit durchläuft.

Beweis. Die Funktion

$$g(s) = f(s) \cdot \prod_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho}$$

ist für $|s-s_0| \leq r$ holomorph und auf der kleineren Kreisscheibe $|s-s_0| \leq \frac{r}{2}$ von null verschieden. Auf dem Rand $|s-s_0| = r$ gilt $|s-\varrho| \geq \frac{r}{2} \geq |s_0 - \varrho|$, und damit

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right| = \left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \cdot \left|\prod_{\varrho} \frac{s_0-\varrho}{s-\varrho}\right| \leq \left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M$$

nach Voraussetzung.

Nach dem Maximumsprinzip gilt diese Ungleichung dann auch auf der Kreisscheibe $|s - s_0| \leq r$. Wir setzen

$$h(s) = \operatorname{Log}\left(\frac{g(s)}{g(s_0)}\right),$$

wobei Log die holomorphe Funktion sei, die aus $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch analytische Fortsetzung hervorgeht. Dann ist $h(s)$ holomorph für $|s - s_0| \leq \frac{r}{2}$. Zudem ist $h(s_0) = 0$ und $\Re(h(s)) = M$. Nach Satz 2.12.6 ist

$$|h'(s)| \leq \frac{2M \cdot \frac{r}{2}}{(\frac{r}{2} - \frac{r}{4})^2} \leq \frac{A \cdot M}{r}$$

für $|s - s_0| \leq \frac{r}{4}$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 2.12.8. *Die Funktion f sei holomorph in einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s - s_0| < r$ umfasst. Es sei*

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M$$

mit $M > 1$ für $|s - s_0| < r$, und f habe keine Nullstellen im Halbkreis $\{|s - s_0| \leq r \colon \Re(s) > \Re(s_0)\}$. Dann gilt

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) < \frac{A \cdot M}{r}.$$

Hat f eine Nullstelle ϱ_0 auf der Strecke zwischen $s_0 - \frac{r}{2}$ und s_0, so gilt

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) < \frac{A \cdot M}{r} - \frac{1}{s_0 - \varrho_0}.$$

Dabei ist A eine absolute Konstante.

Beweis. Nach Satz 2.12.7 gilt

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) < \frac{A \cdot M}{r} - \sum_{|\varrho - s_0| \leq \frac{r}{2}} \Re\left(\frac{1}{s_0 - \varrho}\right).$$

Aus $\Re(\frac{1}{s_0 - \varrho}) \geq 0$ für alle ϱ in der Summe folgt die Behauptung. □

Entscheidend für den Beweis des Primzahlsatzes durch Hadamard und de la Vallée-Poussin war der Nachweis, dass die Riemannsche Zetafunktion keine Nullstellen auf $\sigma = 1$ besitzt.
Wir beginnen mit dem Beweis dieser Tatsache.

Satz 2.12.9. *(Hadamard und de la Vallée-Poussin)*
Für $t \neq 0$ ist $\zeta(1 + it) \neq 0$.

Beweis. Wir verwenden die Ungleichung

$$3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0 \tag{1}$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$.
Angenommen $\zeta(s)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung $m_1 \geq 1$ in $s = 1 + i\gamma$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle der Ordnung $m_2 \geq 0$ in $s = 1 + 2i\gamma$. Für $\sigma > 1$ sei

$$\varphi(s) = 3\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + 4\frac{\zeta'}{\zeta}(s + i\gamma) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s + 2i\gamma).$$

Diese Funktion besitzt in $s=1$ die Laurententwicklung

$$\varphi(s) = -\frac{3}{s-1} + \frac{4m_1}{s-1} + \frac{m_2}{s-1} + h(s)$$

mit einer in $s=1$ holomorphen Funktion $h(s)$. Es folgt

$$\lim_{\sigma\to 1^+} (\Re(\varphi(\sigma))) = \infty.$$

Andererseits ist nach Satz 2.12.2

$$\varphi(\sigma) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \left(3 + 4n^{-i\gamma} + n^{-2i\gamma}\right),$$

also wegen (1)

$$\Re(\varphi(\sigma)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \left(3 + 4\cos(\gamma \log(n)) + \cos(2\gamma \log(n))\right) \le 0$$

ein Widerspruch. □

Dieser Satz lässt sich auch auf Dirichletsche L- Reihen ausdehnen.

Satz 2.12.10. *Es sei $\chi^2 \neq \chi_0$ oder $t > 0$. Dann gilt $L(1+it,\chi) \neq 0$.*

Beweis. Angenommen $L(s,\chi)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung $m_1 \ge 1$ in $s = 1+i\gamma$ und $L(s,\chi^2)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung $m_2 \ge 0$ in $s = 1+2i\gamma$. Dann können $L(s,\chi)$ bzw. $L(s,\chi^2)$ keine Polstellen in $s=1+i\gamma$ bzw. $s = 1+2i\gamma$ besitzen, da $\gamma \neq 0$ oder aber $\chi \neq \chi_0$ bzw. $\chi^2 \neq \chi_0$ ist.
Wir setzen

$$\varphi(s,\chi) = 3\frac{L'}{L}(s,\chi_0) + 4\frac{L'}{L}(s+i\gamma,\chi) + \frac{L'}{L}(s+2i\gamma,\chi^2).$$

Diese Funktion besitzt in $s=1$ die Laurententwicklung

$$\varphi(s,\chi) = -\frac{3}{s-1} + \frac{4m_1}{s-1} + \frac{m_2}{s-1} + h(s,\chi)$$

mit einer in $s=1$ holomorphen Funktion $h(s,\chi)$. Es folgt

$$\lim_{\sigma\to 1^+} (\Re(\varphi(\sigma,\chi))) = \infty.$$

Andererseits ist nach Satz 2.12.2

$$\Re(\varphi(\sigma)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi_0(n) n^{-\sigma} \cdot \Re\left(3\chi_0(n) + 4\chi(n) n^{-i\gamma} + \chi(n)^2 n^{-2i\gamma}\right) \le 0$$

ein Widerspruch. □

Die Nullstellenfreiheit von $\zeta(s)$ bzw. $L(s,\chi)$ auf $\sigma = 1$ reicht für den Beweis des Primzahlsatzes bzw. des Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen aus. Man erhält allerdings nur die Asymptotik. Will man Aussagen mit Restglied, so benötigt man nullstellenfreie Zonen links der Geraden $\sigma = 1$. Diese Ergebnisse können durch eine Erweiterung der in den Sätzen 2.12.7 und 2.12.8 enthaltenen Grundideen erreicht werden.

Definition 2.12.5. Für $q \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{L} = \log q + \log(|t| + 2)$.
Es sei χ ein Dirichletcharakter modulo q und $T > 0$. Mit $N(T, \chi)$ bezeichnen wir die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $L(s, \chi)$ mit $0 \leq \gamma < T$ und $0 \leq \beta \leq 1$.

Satz 2.12.11. *Es sei $q \in \mathbb{N}$, χ ein Dirichletcharakter modulo q, $T \geq 0$ und $M \in \mathbb{N}$. Es ist $N(T+1, \chi) - N(T, \chi) = O(\mathcal{L})$ Für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma \geq -M$ gilt*

$$-\frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{E(q, \chi)}{s-1} - \sum_{\substack{\varrho:\ L(\varrho,\chi)=0 \\ |\Im(\varrho)-t|\leq 1}} \frac{1}{s-\varrho} + O_M(\mathcal{L}).$$

Beweis. Wir wenden Satz 2.12.7 mit

$$f(s) = (s-1)^{E(q,\chi)} \cdot L(s, \chi),$$

$s_0 = 2 + iT$ und $r = 4(M+3)$ an. Es ist

$$|f(s_0)| = |(s_0 - 1)|^{E(q,\chi)} \cdot \prod_p \frac{1}{|1 - \chi(p)p^{-s_0}|} \geq \prod_p \frac{1}{1 + p^{-2}}.$$

Nach Satz 2.12.5 sind die Voraussetzungen von Satz 2.12.7 mit $\kappa = 4(M+4)\mathcal{L}$ erfüllt.
Satz 2.12.7 ergibt für $|s - s_0| \leq M + 3$ dann

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) + \frac{E(q, \chi)}{s-1} - \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho} = O_M(\mathcal{L}), \tag{1}$$

wobei ϱ alle Nullstellen von $L(s, \chi)$ mit $|\varrho - s_0| \leq 2(M+3)$ entsprechend ihrer Vielfachheit durchläuft.
Wir wenden (1) zunächst mit $s = s_0$ und $m = 2$ an. Wegen

$$\frac{L'}{L}(s_0, \chi) = O(1) \quad \text{und} \quad \frac{E(q, \chi)}{s_0 - 1} = O(1)$$

erhalten wir

$$\Re\left(\sum_{|\varrho - s_0| \geq 10} \frac{1}{s_0 - \varrho}\right) = O(\mathcal{L}). \tag{2}$$

Für $\varrho = \beta + i\gamma$ ist

$$\Re\left(\frac{1}{s_0 - \varrho}\right) = \Re\left(\frac{\overline{s_0} - \overline{\varrho}}{|s_0 - \varrho|^2}\right) = \frac{2 - \beta}{|s_0 - \varrho|^2}.$$

Es ist $2 - \beta \geq 1$ und $|s_0 - \varrho|^2 \leq 100$, also

$$\Re\left(\frac{1}{s_0 - \varrho}\right) \geq \frac{1}{100}.$$

Mit (2) folgt

$$N(T+1, \chi) - N(T, \chi) = O(\mathcal{L}).$$

Aus (1) folgt schließlich für $|s - s_0| \leq M + 1$ die Abschätzung

$$\left|\frac{L'}{L}(s, \chi) + \frac{E(q, \chi)}{s-1} - \sum_{|\varrho - s_0| \leq 1} \frac{1}{s - \varrho}\right| = O_M(\mathcal{L}) + O_M\left(\sum_{1 \leq |\varrho - s_0| \leq 2(M+3)} \frac{1}{s - \varrho}\right) = O_M(\mathcal{L}).$$

□

Satz 2.12.12. *(Nullstellenfreie Zone für Dirichletsche L- Reihen)*

(i) Es sei $\chi^2 \neq \chi_0$ oder $|t| \geq 1$. Dann gibt es eine absolute Konstante $c_0 > 0$, so dass

$$L(s,\chi) \neq 0 \tag{$*$}$$

für $\sigma \geq 1 - 2c_0\mathcal{L}^{-1}$ gilt. Für $\sigma \geq 1 - c_0\mathcal{L}^{-1}$ ist

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\mathcal{L}^2). \tag{$**$}$$

(ii) Es sei $\chi^2 = \chi_0$. Dann gibt es eine absolute Konstante $c_1 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Es sei $0 < \delta < c_1$. Dann gilt für alle Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ mit $|\gamma| \geq \frac{\delta}{\log q}$

$$\beta \leq 1 - \frac{\delta}{R\mathcal{L}},$$

wobei $R > 0$ eine absolute Konstante ist. Für $\sigma \geq 1 - \frac{\delta}{10\mathcal{L}}$ gilt

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\mathcal{L}^2).$$

Beweis. (i) Wir nehmen an, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ sei eine Nullstelle der Ordnung $m_1 \geq 1$ von $L(s,\chi)$, wobei $\gamma_0 \geq 0$, $\beta_0 = 1 - \frac{d_0}{\mathcal{L}_\gamma}$ mit $d_0 > 0$ und $\mathcal{L}_\gamma = \log q + \log(\gamma + 2)$ gelte. Wir setzen

$$h(s,\chi) = 3\frac{L'}{L}(s,\chi_0) + 4\frac{L'}{L}(s,\chi) + \frac{L'}{L}(s,\chi^2)$$

und $\sigma_0 = 1 + \frac{4d_0}{\mathcal{L}_\gamma}$. Wir haben für $\sigma > 1$

$$\frac{L'}{L}(s,\chi_0) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O\left(\sum_{p|q}(\log p)p^{-\sigma}\sum_{m\geq 0} p^{-m\sigma}\right) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O(\log q)$$

und damit

$$\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi_0) = -\frac{1}{\sigma_0 - 1} + O(\mathcal{L}_\gamma). \tag{1}$$

Wir wenden nun Satz 2.12.8 mit $s_0 = \sigma_0 + i\gamma_0$, $r = 1/2$ sowie $f(s) = L(s + i\gamma, \chi)$ bzw. $s_0' = \sigma_0 + 2i\gamma_0$, $r = 1/2$ sowie $f(s) = L(s + 2i\gamma, \chi^2)$ an. Im folgenden bedeuten c_j stets absolute positive Konstanten. Wegen

$$|L(\sigma_0 + i\gamma_0, \chi)| \geq \prod_p \frac{1}{1 + p^{-\sigma_0}} \geq \zeta(\sigma_0)^{-1} \geq \frac{c_1}{\sigma_0 - 1}$$

bzw.

$$|L(\sigma_0 + 2i\gamma_0, \chi^2)| \geq \prod_p \frac{1}{1 + p^{-\sigma}} \geq \frac{c_1}{\sigma_0 - 1}$$

haben wir

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \leq e^K \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{f(s)}{f(s_0')}\right| \leq e^K$$

mit $K \leq c_2\mathcal{L}$. Satz 2.12.9 ergibt

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_0 + i\gamma_0, \chi)\right) < c_2\mathcal{L} - \frac{1}{\sigma_0 - \beta_0} \tag{2}$$

sowie

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_0 + 2i\gamma_0, \chi^2)\right) < c_3\mathcal{L}. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) erhalten wir

$$\Re(h(\sigma_0,\chi)) \geq -\frac{3}{\sigma_0-1}+\frac{4}{\sigma_0-\beta_0}-c_4\mathcal{L}_\gamma = \frac{\mathcal{L}_\gamma^2}{4d_0^2}\cdot\left(-\frac{15d_0}{\mathcal{L}_\gamma}+\frac{16d_0}{\mathcal{L}_\gamma}\right)-c_4\mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}_\gamma}{4}-c_4\mathcal{L}_\gamma. \quad (4)$$

Aus der Darstellung

$$\Re(h(\sigma_0,\chi)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma_0}\chi_0(n)\cdot(3+4\cos\theta_n+\cos(2\theta_n)$$

mit $\chi(n)=\cos\theta_n+i\sin\theta_n$ erhalten wir

$$\Re(h(\sigma_0,\chi)) \leq 0. \quad (5)$$

Für hinreichend kleine d_0 stehen (4) und (5) im Widerspruch, womit $(*)$ bewiesen ist.

Es sei nun $s=\sigma+it$ mit $\sigma\geq 1-\frac{c_0}{\mathcal{L}}$. Nach Satz 2.12.11 haben wir

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \frac{E(q,\chi)}{s-1} - \sum_{\substack{\varrho:\ L(\varrho,\chi)=0\\ |\Im(\varrho)-t|\leq 1}}\frac{1}{s-\varrho}+O_M(\mathcal{L}).$$

Nach $(*)$ haben wir

$$\frac{1}{|s-\varrho|}=O(\mathcal{L}).$$

Die Anzahl der Summanden ist $\ll N(t+1,\chi)-N(t-1,\chi)=O(\mathcal{L})$ nach Satz 2.12.11. Daraus folgt $(**)$.

(ii) Wir können $\chi\neq\chi_0$ annehmen, da ansonsten $L(s,\chi)$ in $s=1$ einen Pol erster Ordnung hat. Wir nehmen an, $\varrho_1=\beta_1+i\gamma_1$ sei eine Nullstelle der Ordnung $m_1\geq 1$ von $L(s,\chi)$, wobei $s=\beta_1+i\gamma_1$, $\gamma_1=\frac{d_1\delta}{\log q}$ mit $d_1<1$ und $\beta_1=1-\frac{d_2\delta}{\log q}$ gelte. Wir setzen

$$\sigma_1 = 1+\frac{4d_2\delta}{\log q}.$$

Wir wenden nun Satz 2.12.8 mit $s_1=\sigma_1+i\gamma_1$, $r=1/2$ sowie $f(s)=L(s+i\gamma_1,\chi)$ bzw. $s_1'=\sigma_1+2i\gamma_1$, $r=1/2$ sowie $f(s)=L(s+2i\gamma_1,\chi^2)\cdot(s-1)$ an. Satz 2.12.8 ergibt

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1+i\gamma_1,\chi)\right) < c_5\mathcal{L}-\frac{1}{\sigma_1-\beta_1}$$

sowie

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1+2i\gamma_1,\chi^2)\right) < c_5\mathcal{L}+\frac{1}{\sigma_1-1}.$$

Wir erhalten

$$\Re(h(\sigma_1,\chi)) \geq -\frac{3}{\sigma_1-1}+\frac{4}{\sigma_1-\beta_1}-\frac{1}{\sigma_1-1}+c_5\mathcal{L},$$

was im Widerspruch zu $\Re(h(\sigma_1,\chi))\leq 0$ für genügend kleine d_2 steht.

□

Satz 2.12.13. *Es sei $\alpha\in\mathbb{R}$ die Konvergenzabszisse von*

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$$

mit $a_n\geq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $F(s)$ an der Stelle $s=\alpha$ nicht holomorph.

Beweis. Nach Satz 2.4.1 ist $F(s)$ für $\sigma > \alpha$ holomorph und nach Weierstraß darf $F(s)$ dort differenziert werden. Somit gilt

$$F^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k a_n n^{-s} \log^k n$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma > \alpha$. Für ein $\sigma_0 > \alpha$ gilt daher die Entwicklung

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (s - \sigma_0)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma_0} \log^k n.$$

Wäre $F(s)$ nun an der Stelle $s = \alpha$ holomorph, so müsste diese Entwicklung auch für ein $s = \sigma$ mit $\sigma < \alpha$ konvergieren. Also müsste für ein passendes $\sigma < \alpha$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_0 - \sigma)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma_0} \log^k n$$

konvergieren. Diese Doppelreihe hat positive Glieder, kann also beliebig umgeordnet werden. Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_0 - \sigma)^k \log^k n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma},$$

womit auch diese Reihe konvergieren würde im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkung 2.12.3. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.12.13 kann trotzdem

$$\lim_{\sigma \to \alpha^+} F(\sigma) < \infty$$

sein, so gilt etwa für $a_n = \log^{-2} n$ mit $n \geq 2$ zum einen $\alpha = 1$ und zum anderen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} < \infty.$$

Satz 2.12.14. *Für $\chi^2 = \chi_0$ und $\sigma > 1$ gilt*

$$\zeta(s) \cdot L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit $a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \geq 0$ sowie $a_{n^2} \geq 1$.

Beweis. Es gilt

$$\zeta(s) \cdot L(s, \chi) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

wobei $\chi(p)$ nur die Werte 0 und ± 1 annehmen kann.
Für $\chi(p) = 1$ gilt wegen $\sigma > 1$

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \dots,$$

für $\chi(p) = -1$

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

und für $\chi(p) = 0$

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots .$$

Durch Multiplikation von Produkten aller drei Typen entsteht eine Dirichletreihe mit nichtnegativen Koeffizienten a_n. Zudem gilt $a_{n^2} \geq 1$, weil in allen drei Fällen die Koeffizienten von p^{-2ms} positiv und größer gleich 1 sind. □

Satz 2.12.15. *Für $\chi^2 = \chi_0$ gilt $L(1,\chi) \neq 0$ und sogar $L(1,\chi) > 0$ für $\chi \neq \chi_0$.*

Beweis. Es ist nur der Fall $\chi \neq \chi_0$ zu betrachten, da ansonsten $L(1,\chi_0) = \infty$ gilt. Die Reihe aus Satz 2.12.14 hat die wegen $a_{n^2} \geq 1$ in $s = 1/2$ divergente Teilreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2} n^{-2s},$$

also ist auch die ursprüngliche Reihe selbst für $\sigma < \frac{1}{2}$ divergent. Für ihre Konvergenzabszisse σ_0 gilt somit $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 \leq 1$. Andererseits ist aber $\zeta(s) \cdot L(s,\chi)$ an der Stelle $s = \sigma_0$ wegen Satz 2.12.13 nicht holomorph. Da aber sowohl $\zeta(s)$ als auch $L(s,\chi)$ für $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ holomorph sind, muss $\sigma_0 = 1$ sein. Dann kann aber $s = 1$ keine Nullstelle von $L(s,\chi)$ sein, denn sonst wäre auch $\zeta(s) \cdot L(s,\chi)$ bei $s = 1$ holomorph, da eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 1$ von $L(s,\chi)$ den Pol erster Ordnung von $\zeta(s)$ kompensieren würde. Also gilt $L(1,\chi) \neq 0$ und aus

$$L(1,\chi) = \lim_{\sigma\to 1^+} (\sigma - 1) \cdot \zeta(\sigma) \cdot L(\sigma,\chi)$$

sowie der Nichtnegativität der a_n folgt $L(1,\chi) > 0$. □

Satz 2.12.16. *(Primzahlsatz für arithmetische Progressionen)*
Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $(a,q) = 1$. Dann haben wir für feste Konstanten $c_0 > 0$

(i) $\psi(x,q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_q\left(x \cdot \exp(-c_0(\log x)^{1/2})\right)$

(ii) $\pi(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \mathrm{li}(x) + O_q\left(x \cdot \exp(-c_0(\log x)^{1/2})\right)$

Beweis. Es sei χ ein Dirichletcharakter modulo q. Wir können O.B.d.A. $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$ annehmen. Nach Satz 2.12.4 ist

$$\psi(x,\chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \cdot (\log x)^2}{T}\right)$$

mit $c = c(x) = 1 + \frac{1}{\log x}$. Nach Satz 2.12.12 gibt es absolute positive Konstanten c_1 und c_2, so dass $L(s,\chi) \neq 0$ für

$$\sigma \geq 1 - \frac{2c_1}{\log(q(|t| + 2))} \tag{1}$$

mit $|t| \geq 1$ und für

$$\sigma \geq 1 - c_2|t| \tag{2}$$

mit $|t| < 1$ gilt. Nach Satz 2.12.15 ist $L(1,\chi) \neq 0$. Aus (1), (2) und Satz 2.12.15 folgt die Existenz einer Konstanten $c(q) > 0$ mit $L(s,\chi) \neq 0$ für

$$\sigma \geq 1 - \frac{4c(q)}{\log(|t| + 2)}$$

und

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) \le (\log t)^2$$

für

$$\sigma \ge 1 - \frac{2c(q)}{\log(|t|+2)}.$$

Wir ergänzen den Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\varphi = [c-iT, c+iT] \cup [c+iT, a+iT] \cup [a+iT, a-iT] \cup [a-iT, c-iT]$$

mit $a = 1 - \frac{c(q)}{\log T}$. Für $\chi = \chi_0$ wenden wir den Residuensatz und für $\chi \ne \chi_0$ den Cauchyschen Integralsatz an und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}\,ds = E(q,\chi)\cdot \mathrm{Res}_{s=1}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\cdot\frac{x^s}{s}\right) = E(q,\chi)\cdot x.$$

Aus der Abschätzung

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\mathcal{L}^2).$$

aus Satz 2.12.12 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{c+iT}^{a+iT}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}\,ds &= O_q\left(\frac{x(\log T)^2}{T}\right)\\ \int_{a-iT}^{c-iT}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}\,ds &= O_q\left(\frac{x(\log T)^2}{T}\right)\end{aligned}$$

sowie

$$\int_{a-iT}^{a+iT}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}\,ds = O_q\left(x\cdot\exp\left(-c(q)\frac{\log x}{\log T}(\log T)^3\right)\right).$$

Die ersten beiden Restglieder sind in T monoton fallend, während das letzte Restglied dort monoton wächst. Das optimale Restglied wird erreicht, wenn T so gewählt wird, dass beide etwa gleich groß sind, d.h. wenn

$$\frac{x}{T} = x\cdot\exp\left(-\frac{\log x}{T}\right) \Leftrightarrow \log T = (\log x)^{1/2}$$

gilt. $\square$

2.13 Der Primzahlsatz von Page- Siegel- Walfisz

Der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen besagt, dass für $q \in \mathbb{N}$ und $(a,q)=1$

$$\pi(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)}\cdot \mathrm{li}(x)\cdot(1+o(1))$$

gilt. Anders formuliert: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $x_0 = x_0(q,\epsilon)$, so dass für alle $x \ge x_0$

$$\left|\pi(x,q,a) - \frac{1}{\varphi(q)}\cdot \mathrm{li}(x)\right| \le \epsilon\cdot\mathrm{li}(x)$$

gilt. Die Schwäche dieser Aussage liegt nun darin, dass wir keinerlei Kontrolle darüber haben, wie genau x_0 von q abhängt. Bei gegebenem ϵ könnte x_0 als Funktion von q sehr schnell wachsen, z. B. $x_0(\epsilon,q) = x_0(\epsilon)\cdot e^{e^q}$. Die Abhängigkeit von q wird nun in den Sätzen von Page- Siegel- Walfisz und

Bombieri untersucht. Auch diese Sätze machen Gebrauch von nullstellenfreien Zonen Dirichletscher L- Reihen, deren Abhängigkeit vom Modul q nun kontrolliert werden muss. Diese Abhängigkeit wurde in Satz 2.12.12 bereits verfolgt, nicht aber in Satz 2.12.15. Aus $L(1,\chi)\neq 0$ folgt lediglich die Existenz einer Umgebung U von $s=1$ mit $L(s,\chi)\neq 0$ für $s\in U$. Wir haben jedoch keine Kontrolle über die Größe dieser Umgebung in Abhängigkeit von q. Dieser Mangel soll nun behoben werden.

Satz 2.13.1. *Es sei $q\in\mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Dann gibt es eine absolute Konstante $c_0>0$, so dass im Gebiet $|t|<1$ und $\sigma>1-\frac{c_0}{\log q}$ höchstens eine Nullstelle von $L(s,\chi)$ liegt, die im Falle ihrer Existenz reell und einfach ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass absolute positive Konstanten c_0 und c_1 existieren, so dass für $q\geq q_0$ die Dirichletsche L- Reihe $L(s,\chi)$ im Gebiet

$$\mathcal{G}=\left\{s=\sigma+it\colon \sigma>1-\frac{c_0}{\log q},\ |t|<\frac{c_1}{\log q}\right\} \tag{1}$$

höchstens eine einfache Nullstelle hat. Wegen

$$\frac{L'}{L}(s,\chi_0)=\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+O(\log q)=-\frac{1}{s-1}+O(\log q)$$

können wir $\chi\neq\chi_0$ annehmen. Nach Satz 2.12.12 können wir ferner auch $\chi^2=\chi_0$ annehmen. Nach Satz 2.12.11 haben wir

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=\sum_{\substack{\varrho\colon L(\varrho,\chi)=0\\ |\Im(\varrho)-t|\leq 1}}\frac{1}{s-\varrho}+O_M(\mathcal{L}),$$

d.h. es existiert eine absolute Konstante $C>0$ und $R(s,\chi)$ mit $|R(s,\chi)|\leq C\mathcal{L}$ und

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=\sum_{\substack{\varrho\colon L(\varrho,\chi)=0\\ |\Im(\varrho)-t|\leq 1}}\frac{1}{s-\varrho}+R(s,\chi). \tag{2}$$

Wir wählen nun $c_0=10^{-2}C$ sowie $c_1=10^{-2}c_0$ und nehmen an, $L(s,\chi)$ habe die zwei Nullstellen $\varrho_1=\beta_1+i\gamma_1$ sowie $\varrho_2=\beta_2+i\gamma_2$ mit $\beta_i>1-\frac{c_0}{\log q}$ sowie $|\gamma_i|<\frac{c_1}{\log q}$, wobei dabei die Möglichkeit eingeschlossen ist, dass $\varrho_1=\varrho_2$ gilt und somit ϱ_1 eine mehrfache Nullstelle ist.
Wir wenden (2) mit $s=\sigma_0=1+\frac{2c_0}{\log q}$ an und erhalten

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi)=\frac{1}{\sigma_0-\beta_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{\gamma_1^2}{(\sigma_0-\beta_1)^2}}+\frac{1}{\sigma_0-\beta_2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\gamma_2^2}{(\sigma_0-\beta_2)^2}}+\Re(R(\sigma_0,\chi))\geq\frac{3}{5}\cdot\frac{\log q}{c_0}. \tag{3}$$

Andererseits ist

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma_0}=-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{\log q}{c_0}+O(1). \tag{4}$$

Die Aussagen (3) und (4) stehen für $q\geq q_0$ im Widerspruch.
Wir nehmen ferner an, $L(s,\chi)$ habe eine nichtreelle Nullstelle ϱ_1 in $\mathcal{G}$. Dann ist wegen $\chi^2=\chi_0$ auch $\bar{\varrho}_1\in\mathcal{G}$ im Widerspruch zu (1). □

Definition 2.13.1. Es sei $q\in\mathbb{N}$, χ ein Dirichletcharakter modulo q und c_0 fest. Die einzige möglicherweise existierende einfache reelle Ausnahmenullstelle σ^* von $L(s,\chi)$, für die die Abschätzung $\sigma^*\leq 1-\frac{c_0}{\log q}$ nicht gilt, heißt auch Siegel- Nullstelle von $L(s,\chi)$.

Bemerkung 2.13.1. Es wird vermutet, dass Siegel- Nullstellen nicht existieren. Man hat die wesentlich schärfere verallgemeinerte Riemannsche- Vermutung:
Ist $L(s,\chi) = 0$ mit $0 < \Re(\sigma) < 1$, so gilt $\Re(\sigma) = \frac{1}{2}$.
Ein berühmter Spezialfall ($q = 1$) ist die Riemannsche- Vermutung (Bernhard Riemann 1859):
Ist $\zeta(s) = 0$ mit $0 < \Re(\sigma) < 1$, so gilt $\Re(\sigma) = \frac{1}{2}$.
Die Riemannsche Vermutung ist zur Abschätzung

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x^{1/2+\epsilon}\right)$$

für alle $\epsilon > 0$ äquivalent. Aus der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung folgt

$$\pi(x,q,a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O\left(x^{1/2+\epsilon}\log^2 q\right)$$

für alle q, a mit $(a,q) = 1$.

Wir wollen nun im folgenden eine Abschätzung für den Mindestabstand der Siegel- Nullstelle σ^* von $L(s,\chi)$ zum Punkt 1 herleiten, dem Satz von Siegel. Darüber hinaus wird unter anderem folgen, dass es eine solche Nullstelle höchstens für einen Charakter $\chi \bmod q$ geben kann.
Als Vorbereitung zeigen wir

Satz 2.13.2. *Es seien $q_1, q_2 \geq 0$ und χ_1 bzw. χ_2 reelle primitive Charaktere modulo q_1 bzw. q_2 mit $\chi_1 \neq \chi_2$. Es sei $F(s) = \zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2)$. Dann gilt mit absoluten positiven Konstanten c_1, c_2, c_3 und für $1 - c_3 \leq \sigma < 1$*

$$F(\sigma) > \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1-\sigma}(q_1q_2)^{c_2(1-\sigma)}$$

mit $\lambda = L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)$.

Beweis. Wir nehmen an, es sei $\chi_1\chi_2 = \chi_0$ mit dem Hauptcharakter $\chi_0 \bmod q_1q_2$. Daraus folgt $\chi_1(n) = \chi_2(n)$ für alle n mit $(n, q_1q_2) = 1$. Dann induzieren χ_1 und χ_2 denselben Dirichletcharakter modulo q_1q_2. Damit sind q_1 und q_2 beide Führer von $\chi_1\chi_2$, also gilt $q_1 = q_2$ und damit auch $\chi_1 = \chi_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt also $\chi_1\chi_2 \neq \chi_0$. Damit ist $L(s,\chi_1\chi_2)$ in $\sigma > 0$ holomorph und ebenso $F(s)$ bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum λ. Die Funktion

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} \tag{1}$$

ist somit in $\sigma > 0$ holomorph. Für $\sigma > 1$ gilt

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

mit $b_n \geq 0$. Dies wird wie die analoge Aussage für $\zeta(s) \cdot L(s,\chi_1)$ in Satz 2.12.14 bewiesen. Aus

$$F^{(m)}(2) = (-1)^m \cdot \sum_n b_n n^{-2}(\log n)^m$$

erhalten wir

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (2-s)^m \tag{2}$$

mit $a_m \geq 0$, $a_0 \geq 1$ und $|s-2| < 1$

sowie

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m - \lambda) \cdot (2-s)^m \tag{3}$$

mit $|s-2| < 1$. Da nach (1) die Funktion $g(s)$ in $\sigma > 0$ holomorph ist, gilt (3) auch in $|s-2| \le \frac{3}{2}$. Weiter gilt für $|s-2| = \frac{3}{2}$

$$\zeta(s) = O(1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{s-1} = O(1)$$

und nach Satz 2.12.12

$$L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2) = O\left((q_1q_2)^{c_4}\right)$$

mit einer absoluten Konstanten $c_4 > 0$. Damit folgt

$$g(s) = O\left(q_1q_2\right)^{c_4}) \tag{4}$$

für $|s-2| = \frac{3}{2}$ und auch für $|s-2| \le \frac{3}{2}$ nach dem Maximumprinzip. Aus (2), (3) und (4) folgt mittels der Cauchyschen Integralformel

$$|a_m - \lambda| \le c_5 (q_1q_2)^{c_4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^m \tag{5}$$

mit $m = 0, 1, 2, \ldots$. Wir wählen nun $c_6 > 0$ so, dass $2 - (1 - c_6) = 1 + c_6 < \frac{3}{2}$ ist und finden für $1 - c_6 \le \sigma < 1$ wegen (3)

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \frac{\lambda}{\sigma - 1} + \sum_{0 \le m < M} (a_m - \lambda) \cdot (2-\sigma)^m + \sum_{m \ge M} (a_m - \lambda) \cdot (2-\sigma)^m \\ &\ge 1 - \lambda \cdot \frac{(2-\sigma)^M - 1}{1-\sigma} - c_7 (q_1q_2)^{c_4} \cdot \frac{\alpha^M}{1-\alpha} \end{aligned}$$

mit $\alpha = \frac{2}{3} \cdot (1 + c_6) < 1$. Wir wählen M so groß, dass das letzte Glied kleiner $\frac{1}{2}$ für alle $q_1 \ge 2$ und alle $q_2 \ge 2$ wird. Dies kann etwa mit $M = [c_8 \log(q_1q_2)]$ erreicht werden, wobei $c_8 > 0$ eine absolute Konstante ist. Weiter gilt dann im Bereich $1 - c_6 \le \sigma < 1$

$$(2-\sigma)^M = \exp\left(M \cdot \log(2-\sigma)\right) < \exp\left(c_8 \log(q_1q_2) \cdot c_9(1-\sigma)\right).$$

Hieraus folgt mit $c_3 = c_6$ und $c_2 = c_8c_9$ die Behauptung. □

Satz 2.13.3. *Es seien $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Für $\epsilon > 0$ gibt es $q_0(\epsilon)$, so dass für $q > q_0(\epsilon)$ die Aussage $L(\sigma, \chi) \neq 0$ für $\sigma > 1 - q^{-\epsilon}$ gilt.*

Beweis. Ist χ ein Dirichletcharakter modulo q mit Führer $q^*|q$, so gibt es einen primitiven Charakter χ^* mod q^* mit $\chi = \chi^*\chi_0$, wobei χ_0 der Hauptcharakter modulo q ist. Nach Satz 2.10.5

$$L(s,\chi) = L(s,\chi^*) \cdot \prod_{p|q} (1 - \chi^*(p)p^{-s}).$$

Das endliche Produkt

$$\prod_{p|q} (1 - \chi^*(p)p^{-s})$$

hat nur für $\sigma = 0$ Nullstellen. Daher haben $L(s,\chi)$ und $L(s,\chi^*)$ in der Halbebene $\sigma > 0$ dieselben Nullstellen. Wegen $1 - (q^*)^{-\epsilon} < 1 - q^{-\epsilon}$ genügt es daher, die Behauptung für primitive Charaktere zu beweisen. Ferner kann nach Satz 2.12.12 (i) angenommen werden, dass χ reell ist.

Es seien χ_1 mod q_1 und χ_2 mod q_2 primitive reelle Charaktere, und F sei wie in Satz 2.13.3 definiert. Für $1 - c_1 \leq \sigma_1 < 1$ sei $L(\sigma_1, \chi_1) = 0$. Nach Satz 2.13.2 folgt

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1-\sigma_1} \cdot (q_1 q_2)^{c_2(1-\sigma_1)} < 0.$$

Mittels Abelscher partieller Summation folgt leicht

$$L(1, \chi_1) \cdot L(1, \chi_1\chi_2) = O(\log^2(q_1 q_2)) < (q_1 q_2)^{\epsilon}$$

für $q_1, q_2 > q(\epsilon)$ bei beliebigem $\epsilon > 0$.
Aufgrund der Gültigkeit von $L(1, \chi) > 0$ für $\chi = \chi_1$ und $\chi = \chi_1\chi_2$ nach Satz 2.12.15 folgt

$$L(1, \chi_2) > \frac{1}{2} \cdot (1 - \sigma_1) \cdot (q_1 q_2)^{-c_3(1-\sigma_1)-\epsilon} \tag{1}$$

für $q_1 q_2 > q(\epsilon)$, was wir im folgenden voraussetzen. Wir nehmen an, es sei $1 - \sigma_1 \leq c_4\epsilon$, wobei c_4 später noch genauer bestimmt wird. Dann folgt aus (1)

$$L(1, \chi_2) > \frac{1}{2} \cdot (1 - \sigma_1) \cdot (q_1 q_2)^{-\epsilon(1+c_2c_3)}.$$

Setzen wir jetzt $c_4 = c_2^{-1}$ und wählen wir q_2 groß, $q_2 > q_2'(\epsilon, q_1)$, so dass

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - \sigma_1) \cdot q_1^{-2\epsilon} > q_2^{-\epsilon}$$

wird, so folgt aus (1)

$$L(1, \chi_2) > q_2^{-3\epsilon} \tag{2}$$

für $q_1 q_2 > q(\epsilon)$ und $q_2 > q_2'(\epsilon, q_1)$.
Wenn es also ein χ_1 mod q_1 mit $L(\sigma_1, \chi_1) = 0$ für ein σ_1 mit $1 - c_5\epsilon \leq \sigma_1 < 1$ gibt, so folgt aus (2)

$$L(1, \chi) > q^{-3\epsilon} \tag{3}$$

für $q > \max\{q_2'(\epsilon, q_1), q(\epsilon)/q_1\} = q'(\epsilon)$.
Für $1 - q^{-4\epsilon} \leq \sigma \leq 1$ und $q > q''(\epsilon)$ ergibt sich nach dem Mittelwertsatz

$$L(\sigma, \chi) = L(1, \chi) - (1 - \sigma) \cdot L'(\overline{\sigma}, \chi) \tag{4}$$

mit $\sigma \leq \overline{\sigma} \leq 1$. Mit Abelscher partieller Summation zeigt man, dass für $1 - q^{-4\epsilon} \leq \overline{\sigma} \leq 1$

$$L'(\overline{\sigma}, \chi) = O(\log^2(2q)) \tag{5}$$

gilt.
Aus (4) und (5) folgt

$$|L(\sigma, \chi)| > q^{-3\epsilon} + O(q^{-4\epsilon} \log^2 q) > 0$$

für $1 - q^{-4\epsilon} \leq \sigma \leq 1$ und für hinreichend große q.
Damit ist die Behauptung mit 4ϵ statt ϵ beweisen, wenn es im Bereich $1 - c_4\epsilon \leq \sigma \leq 1$ eine Nullstelle einer beliebigen L- Funktion bzgl. eines beliebigen Moduls q_1 gibt. Wenn alle $L(s, \chi) \neq 0$ sind, so folgt die Behauptung wegen $c_4\epsilon > q^{-\epsilon}$ für $q \geq q'''(\epsilon)$. □

Satz 2.13.4. *(Primzahlsatz von Page- Siegel- Walfisz)*
Es sei $A > 0$ beliebig groß, $q \in \mathbb{N}$ und $(a, q) = 1$ sowie $1 \leq q \leq (\log x)^A$. Dann gibt es eine absolute Konstante $c > 0$ mit

(i) $\psi(x, \chi) = O_A\left(x \cdot \exp(-c(\log x)^{1/2})\right)$

(ii) $\psi(x, q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_A\left(x \cdot \exp(-c(\log x)^{1/2})\right)$

(iii) $\pi(x, q, a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O_A\left(x \cdot \exp(-c(\log x)^{1/2})\right)$.

Beweis. (i) Im folgenden sei χ stets ein Dirichletcharakter modulo q und $q \leq (\log x)^A$. Wir können O.B.d.A. auch $x = m+\frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$ annehmen. Wir setzen $c = 1+\frac{1}{\log x}$ und $T = \exp((\log x)^{1/2})$. Nach Satz 2.11.1 haben wir

$$\psi(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi)\right) \cdot \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(x \cdot \exp\left(-(\log x)^{1/2} \log^2 x\right)\right). \tag{1}$$

Nach Satz 2.12.12 (i) gibt es eine absolute Konstante $c_0 > 0$, so dass $L(s, \chi) \neq 0$ und

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O((\log x)^2) \tag{2}$$

für $\sigma \geq 1 - \frac{c_0}{\log x}$ und $1 \leq |t| \leq T$. Nach Satz 2.13.1 gibt es eine absolute Konstante $c_1 > 0$, so dass im Gebiet $\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log q}$ und $|t| < 1$ die Funktion $L(s, \chi)$ höchstens eine reelle Nullstelle besitzt. Für diese Nullstelle $\sigma(\chi)$ gilt nach Satz 2.13.3

$$\sigma(\chi) \leq 1 - q^{-1/(2A)}, \tag{3}$$

falls $q \geq q_0(A)$ gilt. Wir ergänzen den Integrationsweg $[c - iT, c + iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\mathcal{C} = [c - iT, c + iT] \cup [c + iT, a + iT] \cup [a + iT, a - iT] \cup [a - iT, c - iT]$$

mit $a = 1 - \frac{c_2}{\log x}$ mit $c_2 = \min\{c_0, c_1\}$. Aus Satz 2.12.11 folgt, dass auch für $\sigma = a$ und $|t| \leq 1$ die Abschätzung

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O((\log x)^2) \tag{4}$$

gilt. Aus (1) bis (4) erhalten wir mit $|\vartheta| \leq 2$

$$\begin{aligned} \psi(x, \chi) &= \mathrm{Res}_{s=1}\left(-\frac{L'}{L}(s, \chi) \cdot \frac{x^s}{s}\right) + \mathrm{Res}_{s=\sigma(\chi)}\left(-\frac{L'}{L}(s, \chi) \cdot \frac{x^s}{s}\right) + O_A(x \cdot \exp(-c(\log x)^{1/2})) \\ &= E(q, \chi) \cdot x - \vartheta x \cdot \exp(-(\log x)^{1/2})) + O_A(x \cdot \exp(-c(\log x)^{1/2})), \end{aligned}$$

wobei der von $\sigma(\chi)$ herrürende Term nur dann aufftritt, falls $\sigma(\chi)$ existiert. Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Dies folgt aus (i) mittels der Orthogonalitätsrelation.

(iii) Dies folgt aus (ii) durch Abelsche partielle Summation.

□

2.14 Das Große Sieb

Satz 2.14.1. *Es sei f auf $[\alpha-\delta/2, \alpha+\delta/2]$ stetig differenzierbar. Dann haben wir*

$$|f(\alpha)| \leq \int_{\alpha-\delta/2}^{\alpha+\delta/2} \frac{1}{\delta} \cdot |f(u)| + \frac{1}{2} \cdot |f'(u)|\, du.$$

Beweis. Es sei g auf $[0,1]$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_0^x u \cdot g'(u)\, du = [u \cdot g(u)]_0^x - \int_0^x g(u)\, du = x \cdot g(x) - \int_0^x g(u)\, du \tag{1}$$

sowie

$$\int_x^1 (u-1) \cdot g'(u)\, du = [u \cdot g(u)]_x^1 - \int_x^1 g(u)\, du + g(x) - g(1) = -x \cdot g(x) - \int_x^1 g(u)\, du + g(x). \tag{2}$$

Addition von (1) und (2) ergibt

$$g(x) = \int_0^1 g(u)\, du + \int_0^x u \cdot g'(u)\, du + \int_x^1 (u-1) \cdot g'(u)\, du.$$

Damit gilt

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 |g(u)| + \frac{1}{2} \cdot |g'(u)|\, du. \tag{3}$$

Wir wenden nun (3) mit $g(x) = f(\alpha - \delta/2 + \delta x)$ an und erhalten die Behauptung. □

Definition 2.14.1. Im folgenden seien $a_n \in \mathbb{C}$, $M+1 \leq n \leq M+N$ und

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha).$$

Satz 2.14.2. *(Das Große Sieb)*
Es sei $S(\alpha)$ wie in Definition 2.14.1, $\delta > 0$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_R \in [0,1]$ mit $||\alpha_r - \alpha_s|| \geq \delta$ für $r \neq s$. Dann gilt

$$\sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r)|^2 \leq (N + 3\delta^{-1}) \cdot \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

Beweis. Voraussetzung und Folgerung von Satz 2.14.2 bleiben unverändert, wenn die Koeffizienten a_n durch $a_n \cdot e(Ln)$ mit beliebigem $L \in \mathbb{Z}$ ersetzt werden. Daher können wir O.B.d.A.

$$S(\alpha) = \sum_{n=-k}^{k} a_n \cdot e(n\alpha)$$

mit $k = [\frac{N+1}{2}]$ annehmen.
Wir wenden Satz 2.14.1 mit $f(\alpha) = S(\alpha)^2$ an und erhalten

$$|S(\alpha_r)|^2 \leq \int_{\alpha_r-\delta/2}^{\alpha_r+\delta/2} \frac{1}{\delta} \cdot |S(u)|^2 + \frac{1}{2} \cdot |S(u)| \cdot |S'(u)|\, du,$$

wobei die Grenzen $\alpha_r - \delta/2$ bzw. $\alpha_r + \delta/2$ modulo 1 zu verstehen sind.

Wegen $||\alpha_r - \alpha_s|| \geq \delta$ für $r \neq s$ sind die Intervalle $[\alpha_r - \delta/2, \alpha_r + \delta/2]$ paarweise disjunkt, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r)|^2 &\leq \int_0^1 \delta^{-1} \cdot |S(u)|^2 + |S(u)| \cdot |S'(u)| \, du \\ &\leq \delta^{-1} \cdot \int_0^1 |S(u)|^2 \, du + \left(\int_0^1 |S(u)|^2 \, du\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 |S'(u)|^2 \, du\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Parsevals Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^1 |S(u)|^2 \, du &= \sum_{n=-k}^{k} |a_n|^2 \quad \text{sowie} \\ \int_0^1 |S'(u)|^2 \, du &= \sum_{n=-k}^{k} (2\pi n)^2 \cdot |a_n|^2 \leq (2\pi k)^2 \cdot \sum_{n=-k}^{k} |a_n|^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 2.14.3. *Es sei $S(\alpha)$ wie in Definition 2.14.1 und $Q \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq (N + 3Q^2) \cdot \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

Beweis. Wir wenden Satz 2.14.2 an, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die der Größe nach geordneten Fareybrüche $\frac{a}{q}$ mit $(a, q) = 1$ sind. Es ist dann

$$||\alpha_r - \alpha_s|| = \left| \frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2} \right| = \left| \frac{a_1 q_2 - a_2 q_1}{q_1 q_2} \right| \geq \frac{1}{q_1 q_2} \geq \frac{1}{Q^2}.$$

□

Satz 2.14.4. *(Das Große Sieb für Charaktersummen)*
Es sei $a_n \in \mathbb{C}$, χ ein Dirichletcharakter modulo q und $Q \geq 1$. Weiter sei

$$T(\chi) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n).$$

Dann ist

$$\sum_{q \leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |T(\chi)|^2 \leq (N + 3Q^2) \cdot \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2,$$

wobei $\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}$ *die Summe über alle primitiven Charaktere modulo q bedeute.*

Beweis. Um Satz 2.14.3 anwenden zu können, ersetzen wir daher nun die multiplikativen Charaktere $\chi\colon (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^* \to \mathbb{C}$ durch die additiven Charaktere $e_{a,q}\colon (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +) \to \mathbb{C}$. Nach Satz 2.7.4 haben wir für primitive Dirichletcharaktere $\chi \bmod q$ mit der Gaußschen Summe $\tau(\overline{\chi})$

$$\chi(n) = \tau(\overline{\chi})^{-1} \cdot \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) \cdot e\left(\frac{an}{q}\right)$$

mit $|\tau(\overline{\chi})| = q^{1/2}$.

Wir erhalten

$$T(\chi) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \cdot \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi(a)} \cdot S\left(\frac{a}{q}\right)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi \bmod q}^{*} |T(\chi)|^2 &= \frac{1}{q} \cdot \sum_{\chi \bmod q}^{*} \left| \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi(a)} \cdot S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq \frac{1}{q} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi(a)} \cdot S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \\
&= \frac{1}{q} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \left(\sum_{a_1=1}^{q} \overline{\chi(a_1)} \cdot S\left(\frac{a_1}{q}\right) \right) \cdot \left(\sum_{a_2=1}^{q} \chi(a_2) \cdot S\left(-\frac{a_2}{q}\right) \right) \\
&= \frac{1}{q} \cdot \sum_{a_1, a_2=1}^{q} S\left(\frac{a_1}{q}\right) \cdot S\left(-\frac{a_2}{q}\right) \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a_1)} \cdot \chi(a_2) = \frac{\varphi(q)}{q} \cdot \sum_{a=1}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{q \leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q}^{*} |T(\chi)|^2 \leq \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq (N + 3Q^2) \cdot \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$$

nach Satz 2.14.3. □

Satz 2.14.5. *Es seien $Q \geq 1$, $a_m, b_n \in \mathbb{C}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&\sum_{q \leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max \left| \sum_{1 \leq m \leq M} \sum_{1 \leq n \leq N} a_m b_n \chi(mn) \right| \\
= \; & O\left((M + Q^2)^{1/2} (N + Q^2)^{1/2} \left(\sum_{1 \leq m \leq M} |a_m|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leq n \leq N} |b_n|^2 \right)^{1/2} \log(2MN) \right)
\end{aligned}$$

Beweis. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $c > 0$, $T \geq 1$, $s = \sigma + it$, $y_1 = e^{\alpha + \beta}$ und $y_2 = e^{\alpha - \beta}$. Nach Satz 2.12.2 (Perronsche Formel) haben wir

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y_1^s - y_2^s}{s} \, ds = \begin{cases} 1 + O\left(T^{-1}(\beta - |\alpha|)^{-1}\right), & \text{falls } |\alpha| \leq \beta \\ O\left(T^{-1}(\beta - |\alpha|)^{-1}\right) & \text{falls } |\alpha| > \beta. \end{cases} \tag{1}$$

Da der Integrand auch für $s = 0$ stetig ist, gilt (1) auch für $c = 0$, und wir erhalten

$$\int_{-T}^{T} e^{it\alpha} \cdot \frac{\sin(t\beta)}{t} \, dt = \begin{cases} \pi + O\left(T^{-1}(\beta - |\alpha|)^{-1}\right), & \text{falls } |\alpha| \leq \beta \\ O\left(T^{-1}(\beta - |\alpha|)^{-1}\right) & \text{falls } |\alpha| > \beta. \end{cases}$$

Wir setzen $\beta = \log u$ und erhalten

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_m b_n \chi(mn) = \int_{-T}^{T} A(t, \chi) B(t, \chi) \frac{\sin(t \log u)}{\pi t} \, dt + O\left(T^{-1} \sum_{m,n} |a_m b_n| \left| \log \frac{mn}{u} \right|^{-1} \right) \tag{2}$$

mit

$$A(t, \chi) = \sum_{m=1}^{M} a_m \chi(m) m^{-it} \quad \text{bzw.} \quad B(t, \chi) = \sum_{n=1}^{N} b_n \chi(n) n^{-it}.$$

Wir nehmen O.B.d.A. $u = k + \frac{1}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \le k \le MN$ an. Dann ist

$$\left|\log \frac{mn}{u}\right| \ge \frac{c_0}{u} \ge \frac{c_0}{MN}$$

mit absoluten Konstanten $c_0, c_1 > 0$ und

$$\sin(t \log u) = O(\min\{1, |t| \log(2MN)\}).$$

Damit ist die rechte Seite in (2)

$$O\left(\int_{-T}^{T} |A(t,\chi)B(t,\chi)| \min\left\{\frac{1}{|t|}, \log(2MN)\right\} dt + \frac{MN}{T} \sum_{m\le M} \sum_{n \le N} |a_m b_n|\right) \tag{3}$$

Nach der Cauchy- Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\left|\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} A(t,\chi)B(t,\chi)\right| \le \left(\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |A(t,\chi)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |B(t,\chi)|^2\right)^{1/2}$$

und nach Satz 2.14.4

$$\begin{aligned}
\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |A(t,\chi)|^2 &\le (M+3Q^2) \sum_{1\le m\le M} |a_m|^2 \quad \text{und} \\
\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |B(t,\chi)|^2 &\le (N+3Q^2) \sum_{1\le n\le N} |b_n|^2.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T} \sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} A(t,\chi)B(t,\chi) \min\left\{\frac{1}{|t|}, \log(2MN)\right\} dt \\
\ll\ & (M+Q^2)^{1/2}(N+Q^2)^{1/2} \left(\sum_{m\le M} |a_m|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\le N} |b_n|^2\right)^{1/2} \int_{-T}^{T} \min\left\{\frac{1}{|t|}, \log(2MN)\right\} dt.
\end{aligned}$$

Daraus und aus (2) sowie (3) folgt die Behauptung von Satz 2.14.5. □

2.15 Satz von Bombieri

Satz 2.15.1. *(Satz von Bombieri)*
Es sei $A > 0$ fest. Dann haben wir für $x^{1/2}(\log x)^{-A} \le Q \le x^{1/2}$

$$\sum_{q\le Q} \max_{a\colon (a,q)=1} \max_{y\le x} \left|\psi(y,q,a) - \frac{y}{\varphi(q)}\right| \le x^{1/2} Q (\log x)^5.$$

Bemerkung 2.15.1. Aus Satz 2.15.1 folgt, dass für die meisten $y \le x^{1/2}(\log x)^{-A}$ die Größe

$$\max_{a\colon (a,q)=1} \max_{y\le x} \left|\psi(y,q,a) - \frac{y}{\varphi(q)}\right|$$

wesentlich kleiner als $\frac{x}{\varphi(q)}$ ist.
Diese Tatsache folgt aus der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung für alle $q \le x^{1/2}(\log x)^{-A}$.

Beweis. (Beweis von Satz 2.15.1)
Wir wollen die Sätze des vorigen Abschnitts anwenden. Dazu müssen wir das Problem auf eine Aussage über primitive Charaktere reduzieren. Wir zeigen zunächst, dass Satz 2.15.1 aus folgender Aussage folgt:

$$\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\le x} |\psi(y,\chi)| = O\left((x + x^{5/6}Q + x^{1/2}Q^2)(\log(Qx)^4)\right). \tag{1}$$

Wir haben

$$\psi(y,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\psi(y,\chi).$$

Wir setzen zum einen

$$\psi'(y,\chi) = \begin{cases} \psi(y,\chi), & \text{wenn } \chi \ne \chi_0 \\ \psi(y,\chi) - y, & \text{wenn } \chi = \chi_0 \end{cases}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} E(y,q,a) &= \psi(y,q,a) - \frac{y}{\varphi(q)} \\ E(y,q) &= \max E(y,q,a) \\ E^*(x,q) &= \max_{y\le x} E(y,q). \end{aligned}$$

Dann ist

$$E(y,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \cdot \psi'(y,\chi) \tag{2}$$

und deshalb

$$|E(y,q,a)| \le \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi} |\psi'(y,\chi)|.$$

Der Charakter $\chi \bmod q$ werde vom primitiven Charakter $\chi_1 \bmod q_1$ induziert. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi'(y,\chi_1) - \psi'(y,\chi) &= \sum_{\substack{p^k\le y \\ p|q}} \chi_1(p^k)\log p = O\left(\sum_{p|q} \left[\frac{\log y}{\log p}\right] \log p\right) \\ &= O\left((\log y)\sum_{p|q} \log p\right) = O(\log(qy)^2). \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$E(y,q,a) = O(\log(qy)^2) + O\left(\frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi} |\psi'(y,\chi_1)|\right) \tag{3}$$

Wir sammeln alle Beiträge, die von einem festen primitiven Charalter stammen. Ein primitiver Dirichletcharakter $\chi \bmod q$ induziert Charaktere nach Moduln, die Vielfache von q sind. Deshalb ist die linke Seite von Satz 2.15.1

$$O(Q\log(Qx)^2) + \sum_{q\le Q} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\le x} |\psi(y,\chi)| \left| \sum_{k\le \frac{q}{q}} \frac{1}{\varphi(kq)} \right| \tag{4}$$

Es ist $\varphi(qk) \geq \varphi(k)\varphi(q)$ und

$$\sum_{k\leq z} \frac{1}{\varphi(k)} \leq \prod_{p\leq z} \left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p(p-1)} + \dots\right) = \prod_{p\leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) O(\log z).$$

Deshalb ist der zweite Term in (4)

$$O\left(\log x \sum_{q\leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \max_{y\leq x} |\psi'(y,\chi)|\right),$$

und es genügt zu zeigen, dass

$$\sum_{q\leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \max_{y\leq x} |\psi'(y,\chi)| \ll x^{1/2} Q (\log x)^4 \tag{5}$$

für $x^{1/2}(\log x)^{-A} \leq Q \leq x^{1/2}$ gilt. Aus (1) erhalten wir

$$\sum_{U<q\leq 2U} \frac{1}{\varphi} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \max_{y\leq x} |\psi'(y,\chi)| \ll \left(\frac{x}{U} + x^{5/6} + x^{1/2}U\right) (\log Ux)^4.$$

Wir setzen $U = 2^k$, summieren über k für $(\log x)^A \leq 2^k \leq Q$ und erhalten

$$\sum_{(\log x)^A<q\leq Q} \frac{1}{\varphi} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \max_{y\leq x} |\psi(y,\chi)| \ll \left(x(\log x)^{-A} + x^{5/6}\log Q + x^{1/2}Q\right) (\log Qx)^4. \tag{6}$$

Nach Satz 2.13.4 (i) gilt auch

$$\sum_{q\leq(\log x)^A} \frac{1}{\varphi} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \max_{y\leq x} |\psi(y,\chi)| \ll \left(x(\log x)^{-A} + x^{5/6}\log Q + x^{1/2}Q\right) (\log Qx)^4. \tag{7}$$

Somit zeigen (5), (6) und (7), dass Satz 2.15.1 aus (1) folgt.

Im folgenden wollen wir noch (1) beweisen.
Es ist (Übungsaufgabe)

$$\psi(y,\chi) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \tag{8}$$

mit

$$S_1 = \sum_{n\leq U} \Lambda(n)\chi(n), \tag{9}$$

$$S_2 = -\sum_{t\leq UV} \left(\sum_{\substack{t=md\\ m\leq U\\ d\leq V}} \mu(d)\Lambda(m)\right) \sum_{r\leq \frac{y}{t}} \chi(rt), \tag{10}$$

$$S_3 = \sum_{n\leq y} \left(\sum_{\substack{hd=n\\ d\leq V}} \mu(d)\log h\right) \chi(n), \tag{11}$$

$$S_4 = \sum_{U<m\leq \frac{y}{V}} \Lambda(m) \sum_{V<k\leq \frac{y}{m}} \left(\sum_{\substack{d|k\\ d\leq V}} \mu(d)\right) \chi(mk). \tag{12}$$

Zum Beweis von (1) schätzen wir nun die Summen

$$\Sigma_j := \sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \max_{y\le x} |S_j|$$

für $1 \le j \le 4$ ab.

- $j = 1$:
  Aus elementaren Primzahlabschätzungen folgt $S_1 = O(U)$ und damit
  $$\Sigma_1 = O(UQ^2). \tag{13}$$

- $j = 2$:
  Es ist $S_2 = S_2' + S_2''$ mit
  $$\begin{aligned} S_2' &= -\sum_{t\le U}\left(\sum_{\substack{t=md\\ m\le U\\ d\le V}} \mu(d)\Lambda(m)\right)\sum_{r\le \frac{y}{t}} \chi(rt) \quad \text{und}\\ S_2'' &= -\sum_{U<t\le UV}\left(\sum_{\substack{t=md\\ m\le U\\ d\le V}} \mu(d)\Lambda(m)\right)\sum_{r\le \frac{y}{t}} \chi(rt). \end{aligned}$$
  Zur Abschätzung von S_2' wenden wir die Ungleichung von Pólya- Vinogradoff an (Übungsaufgabe): Ist $\chi \ne \chi_0$ ein Dirichletcharakter modulo q, so ist
  $$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) = O(q^{1/2}\log q). \tag{14}$$
  Weiter beachten wir, dass
  $$\sum_{m|t} \Lambda(m) = \log t$$
  gilt. Wir erhalten für $q > 1$
  $$S_2' \ll (\log U)\sum_{t\le U}\left|\sum_{r\le \frac{y}{t}} chi(r)\right| = O(q^{1/2}U\log^2(qU)). \tag{15}$$
  Für $q = 1$ ergibt sich die triviale Abschätzung
  $$S_2' = O(x\log^2(xU)). \tag{16}$$
  Zur Abschätzung von S_2'' wenden wir Satz 2.14.5 an und erhalten
  $$\begin{aligned} &\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} \max_{y\le x}\left|\sum_{\substack{U<t\le UV\\ M<t\le 2M}}\left(\sum_{\substack{t=md\\ m\le U, d\le V}} \mu(d)\Lambda(m)\right)\left(\sum_{r\le \frac{y}{t}} 1\right)\chi(rt)\right|\\ \ll\ & (M+Q^2)^{1/2}\left(\frac{x}{M}+Q^2\right)^{1/2}\left(\sum_{M<t\le 2M} \log^2 t\right)^{1/2}\left(\sum_{r\le \frac{y}{t}} 1\right)^{1/2}\\ \ll\ & (Q^2x^{1/2} + QxM^{-1/2} + QU^{1/2}V^{1/2} + x)(\log x). \end{aligned}$$

Wir setzen $M = 2^k$, summieren über k und erhalten

$$\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\le x} |S_2''| \ll (Q^2 x^{1/2} + QxU^{-1/2} + QU^{1/2}V^{1/2} + x)(\log x)^2. \tag{17}$$

Die Aussagen (15), (16) und (17) ergeben schließlich

$$\Sigma_2 \ll (Q^{5/2}U + QxU^{-1/2} + Qx^{1/2}U^{1/2}V^{1/2} + x)(\log x)^2. \tag{18}$$

- $j = 3$:
  Es ist

$$S_3 = \sum_{d\le V} \mu(d)\chi(d) \sum_{h\le \frac{y}{d}} (\log h)\chi(h).$$

Durch partielle Summation ergibt sich

$$\sum_{h\le \frac{y}{d}} (\log h)\chi(h) = \left(\sum_{h\le \frac{y}{d}} \chi(d)\right) \log \frac{y}{d} - \int_{1/2}^{\frac{y}{d}} \left(\sum_{h\le w} \chi(h)\right) \frac{dw}{w} = O(q^{1/2}\log(qy))$$

mit $q > 1$ nach (14). Für $q = 1$ schätzen wir trivial ab. Wir erhalten

$$\Sigma_3 \ll (Q^{5/2}V + x)\log^2(Vx). \tag{19}$$

- $j = 4$:
  Wir wenden wieder Satz 2.14.5 an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\le x} \left| \sum_{\substack{U<m\le \frac{y}{V} \\ M<m\le 2M}} \sum_{V<k\le \frac{y}{m}} \left(\sum_{d|k} \mu(d)\right) \chi(mk) \right| \\
\ll\ & (Q^2 + M)^{1/2} \left(Q^2 + \frac{x}{M}\right)^{1/2} \left(\sum_{M<m\le 2M} \Lambda(m)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k\le \frac{x}{M}} \tau(k)^2\right)^{1/2} \log x.
\end{aligned}$$

Wir verwenden die Abschätzung

$$\sum_{k\le u} \tau(k)^2 = O(u\log^3 u),$$

setzen $M = 2^l$, summieren über l und erhalten

$$\Sigma_4 \ll (Q^2 x^{1/2} + QxU^{-1/2} + QxV^{-1/2} + x)(\log x)^4. \tag{20}$$

Wir fassen nun die Abschätzungen der Σ_j für $1 \le j \le 4$ zusammen:
Wir wählen $V = U$ und

$$U = \begin{cases} x^{2/3}Q^{-1}, & \text{falls } x^{1/3} \le Q \le x^{1/2} \\ x^{1/3}, & \text{falls } U = x^{1/3}. \end{cases}$$

Wir erhalten (1) und damit den Beweis von Satz 2.15.1.

$\square$