4.2. Elementare Abschätzungen über Primzahlen

Ein Hauptziel der Primzahltheorie ist es, möglichst genaue Aussagen über die Primzahlzählfunktion $\pi(x) = \sum_{p \le x} 1$ zu erhalten. Es wird wohl übereinstimmend angenommen, daß eine einfache exakte Formel für $\pi(x)$ nicht zu erwarten ist. Hingegen gibt es asymptotische Näherungen für $\pi(x)$.

Gauß vermutete 1792 die Gültigkeit des sogenannten <u>Primzahlsatzes</u>:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1 \qquad \text{oder}$$

$$(*) \qquad \pi(x) = \frac{x}{\log x}\,(1 + o(1)) \qquad (x \to \infty).$$

Tschebyscheff konnte um 1850 erstmals gute untere und obere Abschätzungen für $\pi(x)$ beweisen.
Während ihm der Beweis von $(*)$ nicht gelang, konnte er die genaue Größenordnung von $\pi(x)$ ermitteln.
Sein Hauptresultat ist: Es gibt Konstanten $a, b > 0$, so daß für $x \ge x_0$ gilt:

$$a \frac{x}{\log x} < \pi(x) < b \frac{x}{\log x}.$$

Die besten Werte, die er durch verschiedene Variationen seiner Methode erreichen konnte, waren $a \approx 0{,}92$ und $b \approx 1{,}08$.

149

Während Tschebyscheff Methoden der reellen Analysis benützte, wurde der Beweis des Primzahlsatzes erst durch Mittel der komplexen Funktionentheorie möglich. Er wurde erstmals 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin bewiesen. Wir werden im nächsten Kapitel einen funktionentheoretischen Beweis des Primzahlsatzes geben.

1948 fanden schließlich Erdös und Selberg einen elementaren (d.h. keine komplexe Funktionentheorie benützenden) Beweis. Bis heute bleibt jedoch der funktionentheoretische Zugang der am leichtesten verständliche und liefert schärfere Ergebnisse.

Wir wollen nun zunächst Tschebyscheffs Methode zur Ermittlung der genauen Größenordnung von $\pi(x)$ wiedergeben. Sie beruht in ihrer einfachsten Form im wesentlichen auf der Analyse der Primfaktoren des Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$.

Wir untersuchen zunächst die Primfaktorzerlegung von $n!$

Dazu treffen wir folgende Definitionen:

Definition:

Die von Mangoldtsche Funktion $\Lambda(n)$ ist definiert durch

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^k,\ p \text{ Primzahl}, k \in \mathbb{N}. \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Tschebyscheff funktion ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{p,k \\ p^k \le x}} \log p$$

(Die Summationsvariable p bedeutet im folgenden, daß über Primzahlen summiert wird.)

Es sei $\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p$ und $T(x) = \sum_{n \le x} \log n$.

Die Funktionen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ unterscheiden sich nur geringfügig voneinander, da die Primzahlpotenzen p^k mit $k \ge 2$ in $\psi(x)$ nur einen kleinen Beitrag liefern. Beide sind eng mit der Primzahlzählfunktion $\pi(x)$ verbunden.

Satz 91:

a) Es ist $\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2} \log x)$

b) Sei c eine feste positive Konstante. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$\psi(x) \le cx(1+o(1)) \quad (x \to \infty)$$

$$\vartheta(x) \le cx(1+o(1)) \quad (x \to \infty)$$

$$\pi(x) \le c\frac{x}{\log x}(1+o(1)) \quad (x \to \infty)$$

Dieselbe Äquivalenz gilt für die $\ge$-Ungleichungen. Insbesondere ist der Primzahlsatz $\pi(x) = \frac{x}{\log x}(1+o(1))$ äquivalent zu $\psi(x) = x(1+o(1))$ und zu $\vartheta(x) = x(1+o(1))$.

Beweis: Es ist $\psi(x) = \sum_{\substack{p,k \\ p^k \le x}} \log p = \sum_{p \le x} \log p + \sum_{p^2 \le x} \log p$

$+ \sum_{k \ge 3} \sum_{p^k \le x} \log p.$

Es ist $\sum_{p^2 \le x} \log p = O(x^{1/2} \log x)$

In der Doppelsumme ist $\sum_{p^k \le x} \log p \ne 0$ nur dann, falls $2^k \le x$,

d.h. $k \le \frac{\log x}{\log 2}$. Also $\sum_{k \ge 2} \sum_{p^k \le x} \log p = O(x^{1/3} \log^2 x)$

Also $\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2} \log x) + O(x^{1/3} \log^2 x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2} \log x)$

Der Übergang zwischen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ geschieht mittels partieller Summation.

Nach Satz 87 ist

$\pi(x) = \sum_{p \le x} \log p \cdot \frac{1}{\log p} = \vartheta(x) \frac{1}{\log x} + \int_2^x \vartheta(t) \frac{1}{t \log^2 t}\, dt$

Ist $\vartheta(x) \ge c\,x(1+o(1))$, so folgt sofort $\pi(x) \ge c \frac{x}{\log x}(1+o(1))$,
da $\int_2^x \vartheta(t) \frac{1}{t \log^2 t}\, dt \ge 0$.

Ist $\vartheta(t) \le c\,t(1+o(1))$, so folgt $\pi(x) \le c \frac{x}{\log x}(1+o(1)) + O\left(\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}\right)$

Nun ist $\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = \int_2^{x^{1/2}} \frac{dt}{\log^2 t} + \int_{x^{1/2}}^x \frac{dt}{\log^2 t} = O(x^{1/2}) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$.

Also $\pi(x) \le c \frac{x}{\log x}(1+o(1))$.

Andererseits ist
$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p = \pi(x) \cdot \log x - \int_1^x \pi(t) \frac{1}{t} \, dt$$

Ist $\pi(x) \le c \frac{x}{\log x}(1+o(1))$, so ist $\vartheta(x) \le cx(1+o(1))$.

Sei nun $\pi(x) \ge c \frac{x}{\log x}(1+o(1))$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest vorgegeben.

Fall a) $\pi(x) \le \varepsilon^2 x$

Dann ist $\int_1^x \pi(t) \frac{1}{t} \, dt = \int_1^{\varepsilon x} \pi(t) \frac{1}{t} \, dt + \int_{\varepsilon x}^x \pi(t) \frac{1}{t} \, dt$
$$\le \int_1^{\varepsilon x} 1 \, dt + \int_{\varepsilon x}^x \frac{\varepsilon^2 x}{\varepsilon x} \, dt = 2\varepsilon x$$

Also $\vartheta(x) \ge (c - 2\varepsilon) \frac{x}{\log x}(1+o(1))$.

Fall b) $\pi(x) > \varepsilon^2 x$

Dann ist $\vartheta(x) \ge \sum_{\varepsilon^3 x \le p \le x} \log p \ge (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) x \log(\varepsilon^3 x) \ge cx$

für genügend große x.

Da ε beliebig gewählt werden kann, folgt: $\vartheta(x) \ge c(1+o(1)) \frac{x}{\log x}$

Nun zur angekündigten Primfaktorzerlegung von $n!$

<u>Satz 9.2:</u>
a) Es ist $n! = \prod_{p \le n} p^{e_p(n)}$ mit $e_p(n) = \sum_{k \ge 1} \left[\frac{n}{p^k} \right]$.

b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\log m = \sum_{d \mid m} \Lambda(d)$.

c) Es ist $T(x) = \sum_{1 \le r \le x} \psi\left(\frac{x}{r}\right)$ und $T(x) = x \log x - x + O(\log x)$

153

Beweis:

zu b): Sei $m = p_1^{\alpha_{p_1}} \cdots p_s^{\alpha_{p_s}}$ die Primfaktorzerlegung von m.
Dann ist

$$(1) \quad \log m = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{p_j} \log p_j$$

Andererseits ist $\Lambda(d) \neq 0$ nur für die $d|n$, die von der Form $d = p_i^{\beta}$ mit $1 \leq \beta \leq \alpha_p$ sind. Daher

$$(2) \quad \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{\alpha_{p_j}} \Lambda(p_j^{\beta}) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{p_j} \log p_j$$

Aus (1) und (2) folgt b).

Es ist $T(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d)$

$$= \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, d)}} 1 = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d}\right] = \sum_{p} \sum_{k \geq 1} \Lambda(p^k) \left[\frac{x}{p^k}\right]$$

$$= \sum_{p} (\log p) \sum_{k \geq 1} \left[\frac{x}{p^k}\right]$$

Für $x = n \in \mathbb{N}$ folgt daraus die Behauptung a).

Andererseits gilt, wenn $n = r \cdot d$ gesetzt wird

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(d) \sum_{r \cdot d \leq x} 1 = \sum_{r \leq x} \sum_{d \leq \frac{x}{r}} \Lambda(d) = \sum_{1 \leq r \leq x} \psi\left(\frac{x}{r}\right).$$

Aus Satz 90 folgt schließlich für $n = [x]$

$T(n) = n \log n - n + O(\log n)$.

Nun ist $n \log n = x \log x + O(\log x)$ und $n = x + O(1)$.

Damit folgt:

$T(x) = x \log x - x + O(\log x)$.

154

Satz 93: Es ist $(\log 2 + o(1))\frac{x}{\log x} \le \pi(x) \le (2\log 2 + o(1))\frac{x}{\log x}$

Beweis: Wir analysieren die Primfaktoren des Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$. Es ist $\log\binom{2n}{n} = T(2n) - 2T(n)$

Nach Satz 92c) ergibt sich:

$$(1)\quad \log\binom{2n}{n} = \sum_r \psi\left(\frac{2n}{r}\right) - 2\sum_r \psi\left(\frac{2n}{2r}\right)$$

$$= \psi(2n) - \psi\left(\frac{2n}{2}\right) + \psi\left(\frac{2n}{3}\right) - \psi\left(\frac{2n}{4}\right) \pm \dots$$

Aus dem Binomialsatz ergibt sich andererseits

$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \quad \text{und damit}$$

$$(2)\quad \frac{1}{2n+1} 4^n \le \binom{2n}{n} \le 4^n,$$

da das Maximum von $\binom{2n}{k}$ für $k = n$ angenommen wird.

Aus (1) und (2) folgt nun:

$$(3)\quad \psi(2n) \ge \log\binom{2n}{n} \ge 2(\log 2)\cdot n - \log(2n+1)$$

Das Argument $2n$ kann nun durch beliebige Werte von x ersetzt werden: Sei $x = 2n + \theta$ mit $\theta \in [0,2)$.
Dann ist $\psi(2n) = \psi(x) + O(\log x)$ und $2n = x + O(1)$

Aus (3) folgt daher:

$$\psi(x) \ge x\log 2 + O(\log x).$$

Nach Satz 91 b) folgt damit der erste Teil der Behauptung.

Weiter ergibt sich aus (1) und (2):

$$\psi(2n) - \psi\left(\frac{2n}{2}\right) \le n \log 4 .$$

Wiederum kann $2n$ durch einen beliebigen Wert x ersetzt werden

(4) $\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \le x \log 2 + O(\log x)$

Es ist $\psi(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots = \sum\limits_{0 \le j \le \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]} \left(\psi\left(\frac{x}{2^j}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)\right)$

und daher nach (4):

$$\psi(x) \le \log 2\left(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \ldots\right) + O(\log^2 x), \text{ also}$$

$$\psi(x) \le (2\log 2)x + O(\log^2 x).$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt wiederum nach Satz 91 b).

Wir wollen nun die Technik im Beweis von Satz 93 verfeinern. Dazu bemerken wir, daß die Abschätzungen für den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ auch ohne den Binomischen Lehrsatz erhalten werden können und zwar einfach aus der Stirlingschen Formel, Satz 92 c). Diese Abschätzung kann sofort für allgemeinere Argumente als $2n$ durchgeführt werden und wir erhalten:

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = x \log 2 + O(\log x).$$

Anstelle des speziellen Ausdrucks $T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right)$ betrachten wir nun allgemeinere Ausdrücke von der Form

$$\sum_{d \mid D} \nu(d)\, T\left(\frac{x}{d}\right)$$

156

Diese Ausdrücke werden auf zwei verschiedene Arten ausgewertet.

Zum einen ist nach der Stirlingschen Formel

$$\sum_{d|D} \nu(d)\, T\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{d|D} \nu(d) \left(\frac{x}{d}(\log x - \log d) - \frac{x}{d} + O(\log x)\right)$$

$$(*) = (x\log x - x)\left(\sum_{d|D} \frac{\nu(d)}{d}\right) - x\left(\sum_{d|D} \frac{\nu(d)}{d}\log d\right) + O(\log x).$$

Es war entscheidend, daß der Ausdruck $T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right)$ nicht von der Größenordnung $x\log x$ sondern von der Größenordnung x war. Dies wird in $(*)$ erreicht, wenn wir die $\nu(d)$ so wählen, daß $\sum_{d|D} \frac{\nu(d)}{d} = 0$.

Wir drücken nun $\sum_{d|D} \nu(d)\, T\left(\frac{x}{d}\right)$ noch auf eie zweite Art aus und zwar nach Satz 92c).

Es ist $\sum_{d|D} \nu(d)\, T\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{d|D} \nu(d) \left(\sum_{r\geq 1} \psi\left(\frac{x}{dr}\right)\right)$.

Wir setzen $m = dr$ und vertauschen die Summationsreihenfolge.

$$\sum_{d|D} \nu(d)\, T\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{m\leq x} \psi\left(\frac{x}{m}\right)\left(\sum_{\substack{d|D \\ d|m}} \nu(d)\right) = \sum_{r\leq x} c_r\, \psi\left(\frac{x}{r}\right),$$

wobei offenbar die Koeffizienten nur von der Restklasse von $r \bmod D$ abhängen.

Durch geschickte Wahl der Gewichte $\nu(d)$ erhielt Tschebyscheff sein bestes Ergebnis über $\pi(x)$.

Satz 94: Es ist $a\,\frac{x}{\log x}(1+o(1)) \leq \pi(x) \leq b\,\frac{x}{\log x}(1+o(1))$ $(x \to \infty)$

mit $a = \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 30}{30}$ $(\approx 0{,}921\ldots)$

und $b = \frac{6}{5} \cdot \frac{171}{175}\,a$ $(\approx 1{,}080\ldots)$

Beweis: Wir wenden $(*)$ an mit $D = 30$, $\nu(1) = 1$, $\nu(2) = \nu(3) = \nu(5) = -1$, $\nu(30) = 1$, $\nu(d) = 0$ für alle andern $d \mid D$.

Wir erhalten

$$(1)\quad \sum_{\mu \leq x} \psi\left(\frac{x}{\mu}\right)\Big(\sum_{\substack{d \mid D \\ d \mid \mu}} \nu(d)\Big) = -x\left(-\frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 30}{30}\right) + O(\log x).$$

Für $c_r = \sum \nu(d)$ ergibt sich nun folgende Tabelle

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
c_r	1	0	0	0	0	−1	1	0	0	−1	1	−1	1	0	−1	0	1	−1	1

r	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
c_r	−1	0	0	1	−1	0	0	0	0	1	−1

Entscheidend ist, daß die Vorzeichen der von Null verschiedenen c_r alternieren.

158

Aus (1) erhalten wir

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) \pm \dots = (a + o(1))x$$

mit $a = \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 30}{30}$

Da die Vorzeichen alternieren, erhalten wir:

$\psi(x) \geq a x (1 + o(1))$ und

$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leq a x (1 + o(1))$, also

$$(2) \quad \psi(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{6}\right) - \psi\left(\frac{x}{36}\right) + \dots$$
$$\leq a x \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \dots\right)(1 + o(1)) = \frac{6}{5} a x (1 + o(1))$$

Eine weitere Verschärfung ergibt sich aus

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leq (a + o(1))x - \psi\left(\frac{x}{7}\right) + \psi\left(\frac{x}{10}\right)$$
$$\leq a x \left(1 - \frac{1}{7} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{10}\right)(1 + o(1)) = \frac{171}{175} a x (1 + o(1))$$

wie in (2) folgt dann:

$$\psi(x) \leq \frac{6}{5} \cdot \frac{171}{175} a x (1 + o(1)).$$

Die entsprechenden Aussagen für $\pi(x)$ folgen nach Satz 91.

Erst kürzlich wurde gezeigt, daß man durch geeignete Wahl von D und Gewichten $\nu(d)$ dem Primzahlsatz beliebig nahe kommen kann. Dadurch ergibt sich jedoch kein Beweis des Primzahlsatzes, da beim Beweis dieser Tatsache der Primzahlsatz schon verwendet wurde.

159

Manche Ausdrücke, die mittels Primzahlen gebildet werden, haben ein Verhalten, das leichter zugänglich ist, als die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$.

<u>Satz 95 (Mertens):</u> Für $x \geq 1$ ist

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

<u>Beweis:</u> Nach Satz 92 a) ist für $n \in \mathbb{N}$:

$$\log(n!) = \sum_{p \leq n} e_p(n) \log p = \sum_{p \leq n} \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right] \log p$$

$$= \sum_{p \leq n} \left[\frac{n}{p}\right] \log p + O\Big(n \sum_{p \leq n} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^k}\Big)$$

$$= \sum_{p \leq n} \left(\frac{n}{p} + O(1)\right) \log p + O(n)$$

$$= n \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} + O\Big(\sum_{p \leq n} \log p\Big) + O(n).$$

Aus den Sätzen 91 und 93 folgt $\sum_{p \leq n} \log p = \vartheta(n) = O(n)$.

Nach Satz 92 c) folgt somit:

$$n \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} = \log(n!) + O(n) = n \log n + O(n) \text{ und}$$

somit

$$(*) \quad \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} = \log n + O(1)$$

Ist x beliebig, so wenden wir $(*)$ für $n = [x]$ an.

Wegen $\log x = \log n + o(1)$, folgt die Behauptung von Satz 95.

160

Wir wenden uns nun den Ausdrücken $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$ und $\prod_{p\le x}(1-\frac{1}{p})$ zu.

Zuerst zeigen wir, daß zwischen beiden ein enger Zusammenhang besteht.

Satz 96: Sei $c_0 := \sum_p \left\{\log\left(\frac{1}{1-1/p}\right)-\frac{1}{p}\right\}$ $(\approx 0{,}315718\ldots)$

Dann gilt für $x\ge 2$,

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\left\{1/\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\} - c_0 + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Beweis: Es ist

$$\log\left\{1/\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\} = \sum_{p\le x}\left\{\log\left(\frac{1}{1-1/p}\right)-\frac{1}{p}\right\}+\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$$

$$= \sum_{p\le x}\frac{1}{p} + c_0 - \sum_{p>x}\left\{\log\left(\frac{1}{1-1/p}\right)-\frac{1}{p}\right\}$$

Nach dem Satz von Taylor ist $\log\left(1-\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)$

und daher $\sum_{p>x}\left\{\log\left(\frac{1}{1-1/p}\right)-\frac{1}{p}\right\} = O\left(\sum_{p>x}\frac{1}{p^2}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$

Daraus folgt Satz 96.

Satz 97: Es gibt eine Konstante c_1, so daß für $x\ge 2$:

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Beweis: Mit partieller Summation erhalten wir

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \sum_{p\le x}\left(\frac{\log p}{p}\right)\cdot\frac{1}{\log p} = \left(\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\right)\cdot\frac{1}{\log x} + \int_2^x\left(\sum_{p\le t}\frac{\log p}{p}\right)\frac{1}{t\log^2 t}\,dt$$

Wir setzen $\sum\limits_{p\le t}\frac{\log p}{p}=\log t+R(t)$ und erhalten:

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=(\log x+R(x))\cdot\frac{1}{\log x}+\int_2^x(\log t+R(t))\frac{1}{t\log^2 t}\,dt$$

Nach Satz 95 ist $R(t)=O(1)$ und daher $\int_2^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt$ konvergent. Wir erhalten

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)+\int_2^x\frac{dt}{t\log t}+\int_2^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt$$
$$+O\left(\int_x^\infty\frac{dt}{t\log^2 t}\right)$$

$$=\log\log x+c_1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\text{ mit } c_1=1-\log\log 2+\int_2^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt.$$

<u>Satz 98</u> (Formel von Mertens):

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right),\quad(x\ge 2).$$

<u>Beweis:</u> Nach Sätzen 96 und 97 ist $\log\left\{1/\prod\limits_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}=\sum\limits_{p\le x}\frac{1}{p}+c_0+O\left(\frac{1}{x}\right)$

$=\log\log x+c_0+c_1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$. Daher

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-(c_0+c_1)}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$$

Es bleibt zu zeigen, daß $c_0+c_1=\gamma$ ist.

16c

16c

Für $\sigma > 0$ schreiben wir:

$$\zeta(1+\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\sigma}$$

Aus der Eulerschen Summenformel erhalten wir:

$$(1)\quad \zeta(1+\sigma) = \int_1^{\infty} x^{-1-\sigma}\,dx - \frac{1}{2} - \int_1^{\infty} B_1(t)(1+\sigma)t^{-2-\sigma}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sigma} + O(1) \qquad (\sigma \to 0^+)$$

Wir schreiben nun $\zeta(1+\sigma)$ als ein Produkt über Primzahlen.
Dazu betrachten wir $\prod_{p\le x}(1-p^{-1-\sigma})^{-1}$.

Es ist $\prod_{p\le x}(1-p^{-1-\sigma})^{-1} = \prod_{p\le x}\left(1+p^{-(1+\sigma)}+p^{-2(1+\sigma)}+p^{-3(1+\sigma)}+\ldots\right)$

$= \sum_{n}' n^{-(1+\sigma)}$, wobei die Summe über alle n erstreckt wird, die nur Primfaktoren $\le x$ haben. Daraus folgt:

$$\sum_{n\le x} n^{-(1+\sigma)} \le \prod_{p\le x}(1-p^{-1-\sigma})^{-1} \le \zeta(1+\sigma)$$

Lassen wir $x\to\infty$ gehen, so folgt: $\zeta(1+\sigma) = \prod_p (1-p^{-1-\sigma})^{-1}$
(Eulersche Produktdarstellung der ζ-Funktion)

Wir betrachten nun die Funktion

$$(2)\quad f(\sigma) = \log\zeta(1+\sigma) - \sum_p p^{-1-\sigma} = \sum_p \left\{ \log\left(\frac{1}{1-p^{-1-\sigma}}\right) - p^{-1-\sigma} \right\}$$

Es ist $\log\left(\frac{1}{1-p^{-1-\sigma}}\right) - p^{-(1+\sigma)} = p^{-(1+\sigma)} + p^{-2(1+\sigma)} + \ldots - p^{-(1+\sigma)}$

$$\le \frac{1}{p(p-1)}$$

163

Die unendliche Reihe konvergiert daher ~~absolut~~ gleichmäßig für $\sigma \geq 0$ und insbesondere ist $f(\sigma)$ stetig in $\sigma = 0$. Deshalb

(3) $\lim_{\sigma \to 0^+} f(\sigma) = f(0) = c_0$

Wir formen jetzt die beiden Terme in $f(\sigma)$ um.
Wir schreiben $P(u) := \sum_{p \leq u} 1/p$ und erhalten durch partielle Summation:

(4) $\sum_p p^{-1-\sigma} = \sum_p p^{-1} p^{-\sigma} = \lim_{x \to \infty} \left(\left(\sum_{p \leq x} p^{-1} \right) x^{-\sigma} + \sigma \int_1^x \left(\sum_{p \leq u} p^{-1} \right) u^{-\sigma-1} du \right)$

$= \sigma \int_1^\infty P(u) u^{-\sigma-1} du \underset{(u=e^t)}{=} \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} P(e^t)\, dt$

Andererseits ist nach (1)

$\log \zeta(1+\sigma) = \log\left(\frac{1}{\sigma}(1+O(\sigma))\right) = \log(1/\sigma) + O(\sigma)$

$= \log\left(\frac{1}{1-e^{-\sigma}}\right) + O(\sigma) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\sigma n} n^{-1} + O(\sigma)$

Wir setzen $H(t) = \sum_{1 \leq n \leq t} 1/n$ und erhalten durch partielle Summation:

(5) $\log \zeta(1+\sigma) = \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma(t)} H(t)\, dt + O(\sigma)$.

Aus (2), (4) und (5) erhalten wir:

$f(\sigma) = \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} \left(H(t) - P(e^t) \right) dt + O(\sigma)$.

Nach Satz 89 ist $H(t) = \log t + \gamma + O\left(\frac{1}{t}\right)$, nach Satz 97 $P(e^t) = \log t + c_1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$.

Daher $f(\sigma) = \sigma \int_0^\infty \left\{ \gamma - c_1 + O\left(\frac{1}{t+1}\right) \right\} e^{-\sigma t}\, dt + O(\sigma)$

$= \gamma - c_1 + O\left(\sigma + \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} \frac{dt}{t+1}\right)$

Nun ist $\int_0^\infty e^{-\sigma t} \frac{dt}{t+1} \leq \int_0^{1/\sigma} \frac{dt}{t+1} + \sigma \int_{1/\sigma}^\infty e^{-\sigma t}\, dt = O(\cancel{\sigma} \log 1/\sigma)$

Also $f(\sigma) = \gamma - c_1 + O(\sigma \log 1/\sigma)$

Aus (3) folgt schließlich $c_0 = \lim_{\sigma \to 0^+} f(\sigma) = \gamma - c_1$, also

$c_0 + c_1 = \gamma$, was zu zeigen war.

Wir schließen mit einem weiteren Satz von Tschebyscheff über $\pi(x)$. Zunächst definieren wir lim inf und lim sup einer Funktion analog zu diesen Begriffen für reelle Zahlenfolgen.

Definition: Sei $f(x)$ eine reellwertige für hinreichend große reelle x definierte Funktion. Dann setzen wir

$\liminf_{x\to\infty} f(x) = \sup\{ l$: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $x_0(\varepsilon)$, so daß für $x \geq x_0(\varepsilon)$: $f(x) \geq l - \varepsilon \}$ und

$\limsup_{x\to\infty} f(x) = \inf\{ l$: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $x_0(\varepsilon)$, so daß für $x \geq x_0(\varepsilon)$: $f(x) \leq l + \varepsilon \}$.

Bemerkung: Offenbar ist stets $\liminf_{x\to\infty} f(x) \leq \limsup_{x\to\infty} f(x)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert genau dann, wenn $\liminf_{x\to\infty} f(x) = \limsup_{x\to\infty} f(x) < \infty$

In diesem Fall ist $\lim_{x\to\infty} f(x)$ gleich dem gemeinsamen Wert von lim inf und lim sup.