

Kap. 4 Elementare Ergebnisse über Primzahlen arithmetische Funktionen

4.1. Einige analytische Hilfsmittel

Satz 87 (Abelsche partielle Summation)

Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen und sei

$$A(t) = \sum_{n \leq t} a_n \quad (t > 0).$$

Sei $b(t)$ auf dem Intervall $[1, x]$ stetig differenzierbar.
Dann ist

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t) b'(t) dt$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} A(x)b(x) - \sum_{1 \leq n \leq x} a_n b(n) &= \sum_{1 \leq n \leq x} a_n (b(x) - b(n)) \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x} \int_n^x a_n b'(t) dt = \sum_{1 \leq n \leq x} \left(\sum_{n \leq m \leq [x]-1} \int_m^{m+1} a_n b'(t) dt + \int_{[x]}^x a_n b'(t) dt \right) \\ &= \sum_{1 \leq m \leq [x]-1} \left(\sum_{1 \leq n \leq m} \int_m^{m+1} a_n b'(t) dt \right) + \int_{[x]}^x \left(\sum_{1 \leq n \leq x} a_n \right) b'(t) dt \\ &= \sum_{1 \leq m \leq [x]-1} \int_m^{m+1} \left(\sum_{1 \leq n \leq t} a_n \right) b'(t) dt + \int_{[x]}^x \left(\sum_{1 \leq n \leq t} a_n \right) b'(t) dt \\ &= \int_1^x A(t) b'(t) dt. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung: Mittels der Verwendung von Stieltjes-Integralen ergibt sich der Beweis viel schneller.

$$\text{Es ist } \sum_{1 \leq n \leq x} a_n b(n) = \int_1^x b(t) dA(t) = [A(t)b(t)]_1^x - \int_1^x A(t)b'(t) dt$$

nach der Regel der partiellen Integration für Stieltjesintegrale.

Beispiel: Sei $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\sigma > 0$. Man zeige, daß die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n \alpha} n^{-\sigma}$ konvergiert.

Lösung: Die Reihe ist sicherlich nicht absolut konvergent, falls $\sigma \leq 1$ ist. Hingegen ist die Folge der Partialsummen

$$\sum_{n=1}^k e^{2\pi i n \alpha} = \frac{e^{2\pi i (k+1)\alpha} - e^{2\pi i \alpha}}{e^{2\pi i \alpha} - 1} \quad \text{beschränkt.}$$

Wir wenden nun Satz 87 mit $a_n = e^{2\pi i n \alpha}$, $b(t) = t^{-\sigma}$ an.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \sum_{n \leq x} e^{2\pi i n \alpha} n^{-\sigma} &= \sum_{n \leq x} a_n b(n) \\ &= A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t) dt = A(x)x^{-\sigma} + O\left(\int_1^x A(t)t^{-\sigma-1} dt\right) \end{aligned}$$

Da $A(t)$ beschränkt ist, ist $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x)x^{-\sigma} = 0$ und

$\int_1^{\infty} A(t)t^{-\sigma-1} dt$ ist nach dem Majorantenkriterium

konvergent. Also existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n \leq x} e^{2\pi i n \alpha} n^{-\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n \alpha} n^{-\sigma}$.

Als nächstes wenden wir uns der Eulerschen Summenformel (auch Euler-Maclaurin'sche Summenformel) zu.

Dazu müssen wir zunächst die Bernoullifunktionen definieren.

Definition: Die Folge $(b_r(x))_{r=0}^{\infty}$ von Polynomen auf $[0,1]$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$(1) \quad b_0(x) \equiv 1 \quad (r=0)$$

$$b_r'(x) = r b_{r-1}(x) \quad \text{und}$$

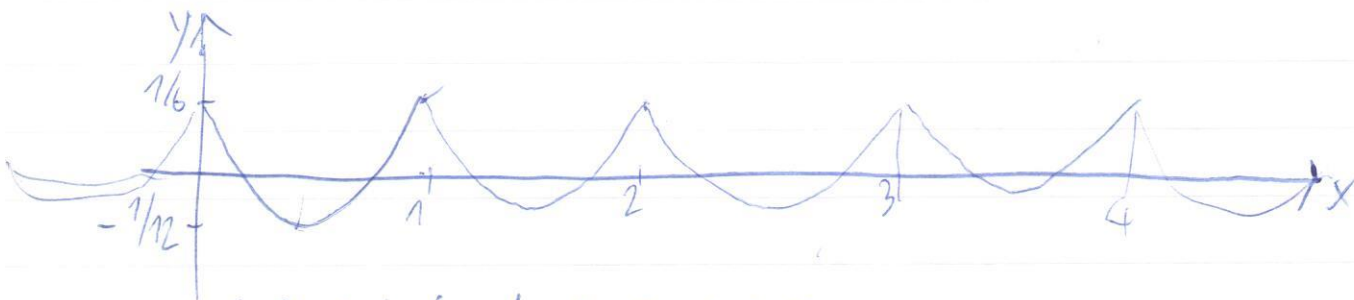
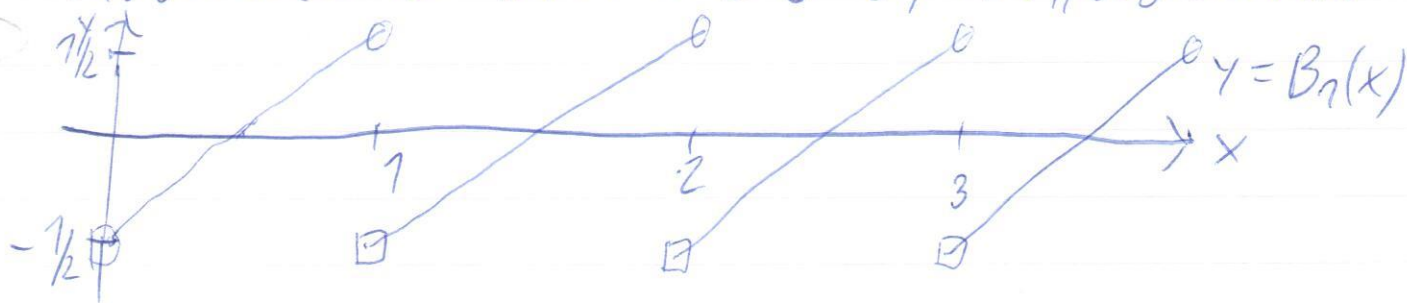
$$(2) \quad \int_0^1 b_r(x) dx = 0 \quad (r \geq 1)$$

Dann definieren wir die r -te Bernoullifunktion $B_r(x)$ als die Funktion mit Periode 1, die auf $[0,1)$ mit $b_r(x)$ übereinstimmt.

Für die ersten Werte von r ergibt sich

$$b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad b_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad b_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

Insbesondere ist $B_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, die „Sägezahnfunktion“.



Aus (2) folgt, daß $B_r(x)$ für $r \geq 2$ stetig ist.

Satz 88 (Summenformel von Euler-Maclaurin)

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und die Funktion f sei auf $[a, b]$ $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar (mit $a, b \in \mathbb{Z}$). Dann ist

$$\sum_{a \leq n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t) dt + \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}(0)}{(r+1)!} (f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)) \\ + \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t) dt.$$

Beweis: Die Behauptung wird durch Induktion nach k bewiesen. Wir führen zunächst den Beweis für $k=0$.

Für $c \in \mathbb{Z}$, $c \in [a, b)$ haben wir:

$$\int_c^{c+1} f(t) dt + \int_c^{c+1} f'(t) \left(t - [t] - \frac{1}{2} \right) dt \\ = \int_c^{c+1} f(t) dt - c(f(c+1) - f(c)) + \int_c^{c+1} f'(t) \left(t - \frac{1}{2} \right) dt$$

Partielle Integration ergibt:

$$\int_c^{c+1} f'(t) \left(t - \frac{1}{2} \right) dt = \left[f(t) \left(t - \frac{1}{2} \right) \right]_c^{c+1} - \int_c^{c+1} f(t) dt \\ = f(c+1) \left(c + \frac{1}{2} \right) - f(c) \left(c - \frac{1}{2} \right) - \int_c^{c+1} f(t) dt \\ \Rightarrow \int_c^{c+1} f(t) dt + \int_c^{c+1} f'(t) B_1(t) dt = \frac{1}{2} f(c) + \frac{1}{2} f(c+1)$$

In dem wir dies für $a \leq c \leq b-1$ summieren, erhalten wir

$$\sum_{a \leq n \leq b} f(n) + \frac{1}{2} (f(a) - f(b)) = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b B_1(t) f'(t) dt, \text{ also} \\ \text{die Behauptung für } k=0.$$

Sei nun die Behauptung schon für k bewiesen und sei f auf $[a, b]$ $(k+2)$ -mal stetig differenzierbar.

$$\text{Dann ist } \int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t) dt = \sum_{a \leq c \leq b-1} \int_c^{c+1} B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t) dt$$

Partielle Integration ergibt:

$$\int_c^{c+1} B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t) dt = \left[\frac{B_{k+2}(t)}{k+2} f^{(k+1)}(t) \right]_c^{c+1} - \frac{1}{k+2} \int_c^{c+1} B_{k+2}(t) f^{(k+2)}(t) dt$$

Da nach (1) $\frac{B_{k+2}(t)}{k+2}$ eine Stammfunktion von $B_{k+1}(t)$

auf $(c, c+1)$ ist, die auch in c und $c+1$ stetig ist.

Summation ergibt wiederum:

$$\int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t) dt = \frac{B_{k+2}(0)}{k+2} (f^{(k+1)}(b) - f^{(k+1)}(a)) - \frac{1}{k+2} \int_a^b B_{k+2}(t) f^{(k+2)}(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Also } \sum_{a \leq n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(t) dt + \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}(0)}{(r+1)!} (f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)) \\ &+ \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \left\{ \frac{B_{k+2}(0)}{k+2} (f^{(k+1)}(b) - f^{(k+1)}(a)) \right\} - \frac{1}{k+2} \int_a^b B_{k+2}(t) f^{(k+2)}(t) dt \\ &= \int_a^b f(t) dt + \sum_{r=0}^{k+1} \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}(0)}{(r+1)!} (f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)) \\ &+ \frac{(-1)^{k+1}}{(k+2)!} \int_a^b B_{k+2}(t) f^{(k+2)}(t) dt, \text{ die Behauptung für } k+2. \end{aligned}$$

Wir wenden die Eulersche Summenformel nun auf die Bestimmung der Partialsummen der harmonischen Reihe an.

Zunächst geben wir eine

Definition: Die Zahl $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m \leq n} \frac{1}{m} - \log n \right)$

heißt Eulersche Konstante (auch Euler-Mascheroni-Konstante).

(Der numerische Wert ist $\gamma \approx 0,577\ 275\ 663$. Die Existenz dieser Konstanten wird sich aus dem Beweis von Satz 89 ergeben.)

Satz 89: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\theta}{60n^4}, \text{ mit } \theta \in (0,1).$$

Beweis: Wir wenden Satz 88 an mit $f(t) = \frac{1}{t}$, $a=1$, $b=n$, $k=3$.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{m} &= \int_1^n \frac{1}{t} dt - B_1(0) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{2} B_2(0) \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} B_3(0) \left(\frac{2}{n^3} - 2 \right) + \frac{1}{24} B_4(0) \left(6 - \frac{6}{n^4} \right) \\ &\quad - \frac{1}{24} \int_1^n 24 t^{-5} B_4(t) dt \\ &= \log n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) + \frac{1}{120} \left(\frac{1}{n^4} - 1 \right) - \int_1^n B_4(t) t^{-5} dt. \end{aligned}$$

Indem wir $m=1$ addieren und $n \rightarrow \infty$ streben lassen, erhalten wir:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120} - \int_1^{\infty} t^{-5} B_4(t) dt.$$

Weegen $|B_4(t)| \leq \frac{1}{30}$ gilt nun: $\left| \int_1^{\infty} t^{-5} B_4(t) dt \right| < \frac{1}{720n^4}.$

(Stirling'sche Formel)

Satz 90: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt mit einer gewissen Konstanten D :

$$\log(n!) = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + D + \frac{1}{6} \theta n^{-1} \text{ mit } \theta \in (0, 1).$$

Beweis: Nach Satz 88 ist:

$$\sum_{2 \leq m \leq n} \log m = \int_1^n \log t \, dt - B_1(0) \log n + \frac{1}{2} B_2(0) \left(-1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \int_1^n B_2(t) t^{-2} \, dt$$

Wir setzen $D = 1 - \frac{1}{2} B_2(0) + \frac{1}{2} \int_1^\infty B_2(t) t^{-2} \, dt$ und erhalten

$$\log(n!) = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + D + \frac{1}{12n} - \frac{1}{2} \int_n^\infty B_2(t) t^{-2} \, dt$$

Die Behauptung folgt nun wegen $\left| \int_n^\infty B_2(t) t^{-2} \, dt \right| \leq \frac{1}{6} n^{-1}$.