

Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: in der noch zu terminierenden Übung in der KW 17

1. Es ist zu zeigen, dass alle stetigen Charaktere der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ von der Form

$$\chi_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \chi_\alpha(t) = e^{i\alpha t}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ sind.

Wir zeigen dies, indem wir nachweisen, dass diese Charaktergruppe (C, \circ) zu $(\mathbb{R}, +)$ isomorph ist.

Wir betrachten dazu die Abbildung $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow C$, $\alpha \rightarrow \chi_\alpha$ mit $\chi_\alpha: t \rightarrow e^{i\alpha t}$.

Dabei ist χ_α wegen der Stetigkeit und der Relationstreue auch tatsächlich ein Charakter.

Insbesondere sei χ_0 der Hauptcharakter.

(a) Zeige, dass die Abbildung Φ injektiv ist.

(b) Es bleibt noch, die Surjektivität von Φ zu zeigen.

i. Es sei χ ein beliebiger Charakter von $(\mathbb{R}, +)$ und $\beta \in \mathbb{R}$.

Zeige, dass ein $\beta > 0$ mit $\chi(\beta) = 1$ existiert.

ii. Es sei $\chi \neq \chi_0$. Zeige, dass dann ein minimales derartiges β existiert.

iii. Zeige nun die Behauptung.

(14 Punkte)

2. Zeige, dass alle stetigen Charaktere χ der Gruppe (\mathbb{C}^*, \cdot) durch $\chi(z) = z^m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ gegeben sind.

(6 Punkte)

3. Gib eine Liste sämtlicher Charaktere von $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \cdot)$ mit ihren Werten an.

(4 Punkte)