Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: **Montag, 12. Juni 2017 um 12:15 Uhr im H 21**, vor den Übungen

1. Es sei $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 0$. Zeige:

   (a) Es gilt
   $$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \cdot \int_1^\infty \frac{x - [x]}{x^{s+1}}\, dx.$$

   (b) Verallgemeinert gilt sogar mit einem $N \in \mathbb{N}$
   $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} n^{-s} - s \cdot \int_N^\infty \frac{P_0(x)}{x^{s+1}}\, dx - \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{-s}}{2}.$$

   (c) Folgere daraus
   $$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O\left(x^{-\sigma}\right)$$
   für $x \to \infty$ und zwar gleichmäßig in $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ und $|t| < 2\pi x C^{-1}$ für ein festes $C > 1$.

   Hinweis:
   Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass ein $C > 1$ existiert, so dass gleichmäßig
   $$\sum_{x < n \leq N} n^{-s} = \int_x^N u^{-s}\, du + O\left(x^{-\sigma}\right)$$
   für alle $|t| < 2\pi x C^{-1}$ gilt. (8 Punkte)

2. Es sei χ ein Dirichletcharakter modulo 8.

   (a) Gib die Dirichletschen L- Reihen $L(s, \chi)$ für die vier Dirichletcharaktere modulo 8 an.

   (b) Zeige, dass $L(s, \chi) > 0$ für $\chi \neq \chi_0$ und $\Re(s) > 1$ ist.

   Hinweis:
   Nutze dazu Hilfsfunktionen, um die Darstellung in Teilaufgabe a) zu vereinfachen und $L(s, \chi)$ nach unten abzuschätzen.

   (c) Zeige mittels des Satzes von Taylor, dass $\log(1 - \chi(p)p^{-s}) = -\chi(p)p^{-s} + c(p)p^{-2s}$ für $p \geq 2$ und $\Re(s) > 1$ mit $|c(p)| \leq 2$ gilt.

   (d) Zeige, dass für $\Re(s) > 1$
   $$\left| \log L(s, \chi) - \sum_p \chi(p) p^{-s} \right| < 2$$
   gilt.

   Hinweis:
   Es darf dabei ohne Beweis die Identität $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ verwendet werden.

(e) Zeige, dass für alle $\chi \neq \chi_0$ ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $|\log L(s,\chi)| \leq \log r$ existiert.

(f) Zeige

$$\lim_{s \to 1^+} L(s,\chi) \neq 0.$$

(g) Schätze nun $|\log L(s,\chi_0)|$ geeignet nach unten ab.

<u>*Hinweis:*</u>
Nutze dazu Aufgabe 1 in einem sehr trivialen Fall.

(h) Bestimme für $k \in \{1,3,5,7\}$ Konstanten C_k, so dass

$$\left| \sum_{p \equiv k \bmod 8} p^{-s} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{s-1} \right| \leq C_k$$

gilt.

<u>*Hinweis:*</u>
Kombiniere nun die vorigen Teilaufgaben sowie die Orthogonalitätsrelationen 2. Art.

(i) Zeige, dass jede der vier arithmetischen Progressionen $k \bmod 8$ mit $k \in \{1,3,5,7\}$ unendlich viele Primzahlen enthält. (16 Punkte)