ulm university universität uulm

Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 21. Juni 2017, vor den Übungen

1. Es sei $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $y_n \in [0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $[\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$ und $x > 0$ sei
$$N(x, \alpha, \beta) = |\{n \leq x \colon y_n \in [\alpha, \beta]\}|.$$
Die Folge (y_n) heißt gleichverteilt im Intervall $[0,1]$, falls
$$\lim_{x \to \infty} x^{-1} \cdot N(x, \alpha, \beta) = \beta - \alpha$$
für alle $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ gilt.
Zeige, dass die Folge (y_n) genau dann in $[0,1]$ gleichverteilt ist, wenn für alle über $[0,1]$ Riemann-integrierbaren Funktionen f
$$\lim_{x \to \infty} x^{-1} \cdot \sum_{n \leq x} f(y_n) = \int_0^1 f(u)\, du$$
gilt.

Hinweis:
Für die Richtung "$\Rightarrow$" ist die Definition von Ober- und Untersummen hilfreich. (14 Punkte)

2. Es sei $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n.

(a) Zeige:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{\omega(n)} \mu^2(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{k}{p^s}\right)$$
für $\sigma > 1$.

Hinweis:
Beachte eine spezielle Eigenschaft von $\omega(n)$.

(b) Es sei $\tau_k(n)$ die Anzahl aller Darstellungen der Form $n = d_1 \cdots d_k$ mit $d_j \in \mathbb{N}$.
Zeige:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{k}{p^s} + \frac{p_2(k)}{p^{2s}} + \ldots\right)$$
mit Polynomen p_j. Gib p_j an.

Hinweis:
Nutze etwas Kombinatorik und eine spezielle Eigenschaft von $\tau_k(n)$.

(c) Zeige:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{\omega(n)} \mu^2(n)}{n^s} = \zeta(s)^k \cdot H_k(s),$$
wobei $H_k(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ holomorph fortgesetzt werden kann. (10 Punkte)