Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 28. Juni 2017, vor den Übungen

1. (Reeller Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes)
   Es sei $\chi \bmod q$ ein reeller und vom Hauptcharakter verschiedener Dirichletcharakter, d.h. $\chi^2 = \chi_0$, aber $\chi \neq \chi_0$.

   (a) Es sei $a_n = (\chi \star 1)(n)$. Zeige, dass $a_n \geq 0$ und $a_{n^2} \geq 1$ gilt.

   (b) Zeige mit der Eulerschen Summenformel

   $$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + b + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

   für eine Konstante b.

   (c) Es seien

   $$\begin{aligned} S(x,\chi) &:= \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \\ S_1(x,\chi) &:= \sum_{d \leq \sqrt{x}} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} \frac{\chi(d)}{\sqrt{dm}} \\ S_2(x,\chi) &:= \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\sqrt{x} < d \leq \frac{x}{m}} \frac{\chi(d)}{\sqrt{dm}}. \end{aligned}$$

   Zeige mittels Teilaufgabe b)

   $$S_1(x,\chi) = 2\sqrt{x} \cdot \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{d} + b \cdot \left(L(1/2,\chi) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + O(1) = 2\sqrt{x} \cdot \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{d} + O(1)$$

   für $x \to \infty$.

   (d) Zeige mit Abelscher Partieller Summation

   $$\sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{d} = L(1,\chi) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

   für $x \to \infty$.

   (e) Zeige $S_2(x,\chi) = O(1)$ mit Abelscher Partieller Summation.

   (f) Zeige mittels der Teilaufgaben c), d) und e), dass aus $L(1,\chi) = 0$ die Aussage $S(x,\chi) = O(1)$ für $x \to \infty$ folgt.

   (g) Zeige unter Verwendung von Teilaufgabe a), dass

   $$S(x,\chi) \geq \frac{1}{2} \cdot \log x$$

   für $x \to \infty$ gilt.

   (h) Zeige $L(1,\chi) \neq 0$. (16 Punkte)

2. Es sei

$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

(a) Zeige, dass für $N \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \ldots + (N-1)! \cdot \frac{x}{(\log x)^N} + O_N\left(\frac{x}{(\log x)^{N+1}}\right)$$

für $x \to \infty$ gilt.

(b) Eine schärfere Form des Primzahlsatzes besagt:
Es gibt ein $c_1 > 0$, so dass

$$\psi(x) = x + O\left(x \cdot \exp(-c_1(\log x)^{1/2})\right)$$

für $x \to \infty$ gilt. Folgere daraus, dass ein $c_2 > 0$ existiert, so dass

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x \cdot \exp(-c_2(\log x)^{1/2})\right)$$

für $x \to \infty$ gilt.

(c) Gauß bzw. Legendre haben folgende Approximation π_G bzw. π_L für $\pi(x)$ vorgeschlagen:

$$\pi_G = \frac{x}{\log x - 1} \quad \text{bzw.} \quad \pi_L(x) = \frac{x}{\log x - A}$$

mit $A = 1,083$. Welches ist die bessere Approximation? (8 Punkte)