Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 5. Juli 2017, vor den Übungen

1. Finde sämtliche Dirichletcharaktere $\chi \bmod 15$. Entscheide in jedem Fall, ob χ primitiv ist und bestimme den Führer von χ. (4 Punkte)

2. Es sei $q > 1$, χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo q und $M, N \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$S = S(M, N, \chi) := \sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n).$$

   Zeige:

   (a) $S = \dfrac{1}{\tau(\overline{\chi})} \cdot \displaystyle\sum_{a=1}^{q-1} \overline{\chi(a)} \sum_{n=M+1}^{M+N} e\left(\frac{an}{q}\right)$

   (b) $|S| \leq q^{-1/2} \cdot \displaystyle\sum_{a=1}^{q-1} \frac{1}{\sin(\pi a/q)}$

   (c) Es seien $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ und die Funktion $f\colon \left[\alpha - \frac{\delta}{2}, \alpha + \frac{\delta}{2}\right] \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt

$$f(\alpha) \leq \delta^{-1} \int_{\alpha-\frac{\delta}{2}}^{\alpha+\frac{\delta}{2}} f(\beta)\, d\beta.$$

   (d) $|S| \leq q^{1/2} \cdot \displaystyle\int_{1/2q^{-1}}^{1-1/2q^{-1}} \frac{d\beta}{\sin(\pi\beta)}$

   (e) $|S| < q^{1/2} \log q$. (11 Punkte)

3. Es sei (y_k) eine Folge mit $y_k \in [0,1]$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass (y_k) genau dann auf $[0,1]$ gleichverteilt ist, wenn für alle $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \cdot \sum_{k \leq x} e(my_k) = 0.$$

   gilt.

   Hinweis:
   Verwende das Gleichverteilungskriterium in Aufgabe 1 von Übungsblatt 6. (9 Punkte)