ulm university universität uulm

Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 12. Juli 2017, vor den Übungen

1. Für $u \in \mathbb{R}$ sei $u = [u] + \{u\}$, und $\{u\}$ heißt der gebrochene Teil von u. Weiter sei $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.
   Zeige: Ist α irrational, so ist $\{n\alpha\}$ auf $[0, 1]$ gleichverteilt.

   Hinweis:
   Verwende das Gleichverteilungskriterium in Aufgabe 3 von Übungsblatt 7. (4 Punkte)

2. Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass wenn $\Delta_h(x_n) := (x_{n+h} - x_n)$ für alle $h \neq 0$ gleichverteilt ist, auch die Folge (x_n) gleichverteilt ist.

   (a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und
   $$S := \sum_{n=1}^{N} e(f(n)).$$
   Zeige die Darstellung $S = T + \theta \cdot (q + 1)$ mit $|\theta| \leq 1$ sowie
   $$T = \frac{1}{q} \cdot \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=1}^{q} e(f(n + h)).$$
   Hinweis:
   Bestimme dazu die Anzahl der Paare (n, h) mit $m = n + h$ für $1 \leq n \leq N$ und $1 \leq h \leq q$.

   (b) Zeige mit der Cauchy- Schwarzschen Ungleichung
   $$|T|^2 \leq \frac{N}{q^2} \cdot \sum_{h_1,h_1=1}^{q} \sum_{n=1}^{N} e(f(n + h_1) - f(n + h_2)).$$

   Es sei ab nun $f(n) := k \cdot x_n$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und $T = T(N)$.

   (c) Zeige nun
   $$|T|^2 \leq \frac{N^2}{q^2} \cdot \sum_{h_1,h_1=1}^{q} \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} e(k \cdot y_n) \right).$$

   (d) Zeige für jedes $\epsilon > 0$
   $$|T|^2 \leq N^2 \cdot \left(\epsilon + \frac{1}{q} \right).$$
   Hinweis:
   Verwende dazu das Gleichverteilungskriterium in Aufgabe 3 von Übungsblatt 7.

   (e) Zeige mit Teilaufgabe a), dass (x_n) gleichverteilt ist. (10 Punkte)

3. Es sei $p(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \ldots + \alpha_0$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten.
   Zeige: Ist der Leitkoeffizient α_k irrational, so ist $y_n = \{p(n)\}$ eine in $[0, 1]$ gleichverteilte Folge.
   (4 Punkte)

4. Der Approximationssatz von Krockener lautet:
Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig und $\theta_1, \ldots, \theta_n \in [0,1]$.
Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $t \in \mathbb{R}$, so dass $|\{t\alpha_j - \theta_j\}| < \epsilon$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt.

In dieser Aufgabe soll nun folgende Verschärfung dieses Approximationssatzes bewiesen werden:
Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig, und es seien n Paare $(\theta_{i,1}, \theta_{i,2})$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\theta_{i,1} < \theta_{i,2} < \theta_{i,1} + 1$ gegeben. Weiter sei R die Menge aller $t \in \mathbb{R}$, für die ganze Zahlen $r_i \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass $t\alpha_i - r_i \in I_i = [\theta_{i,1}, \theta_{i,2}]$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. Es sei

$$\chi_R(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$V = \prod_{i=1}^{n} (\theta_{i,2} - \theta_{i,1})$$

das Volumen des n- dimensionalen Quaders $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$.
Dann gilt

$$V = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \chi_R(t)\, dt.$$

(a) Approximiere die charakteristischen Funktionen der Mengen $I_i + \mathbb{Z}$ durch Fourierreihen $\underline{S}_i$ bzw. $\overline{S}_i$ von unten und von oben.

(b) Wir setzen nun

$$\underline{S}(t) := \prod_{i=1}^{n} \underline{S}_i \quad \text{bzw.} \quad \overline{S}(t) := \prod_{i=1}^{n} \overline{S}_i.$$

Zeige nun die Behauptung. (6 Punkte)