

Aufgaben zu Analysis für Informatiker

1. Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit

(a) $|x| \leq |x - 3|$

(b) $|2x + 1| \geq |2 - x|$

2. Berechne:

(a) $(B83C)_{HEX} + (9A79)_{HEX}$

(b) $\binom{5}{2}, \quad \binom{-1/2}{3}$

(c) $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)$

(d) $\sum_{\nu=0}^n \sum_{k=\nu}^n (-3)^\nu \binom{k}{\nu} \binom{n}{k}$

3. Löse folgende Gleichungen in \mathbb{R} .

(a) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

(b) $\ln^2 x + \ln x - 2 = 0$

(c) $\log_2 x + \log_2(x + 2) = 3$

(d) $2^{2-x} \cdot 5^{2x-1} = 10^x$

4. Zeige mit Hilfe der Definition von Konvergenz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n(n + 1)} = \frac{1}{2}$

5. Im Folgenden ist jeweils das n -te Glied einer Folge gegeben. Bestimme, falls existent, ihren Grenzwert.

(a) $\frac{n^2 + n^3}{2n^3 - 3n^2 - 4}$

(b) $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^7$

(c) $\frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3 + n!(1 + (-1)^n)}$

(d) $\frac{5^n + (-1)^n \cdot 3^n}{n^5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}$

6. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-3}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k}{2k-1}\right)^k$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^3-2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}\right)$

7. Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a-2} & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 + b & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

stetig ist. Gibt es a und b , für die f differenzierbar ist?

8. Berechne mit Hilfe der Definition die Ableitung von

$$f(x) = \sqrt{x}$$

9. Differenziere folgende Ausdrücke nach x .

(a) $\frac{3^x}{x^3}$

(b) $e^{2x} \cos(x^2 - 1)$

(c) $\sqrt{x \ln x}$

(d) $\frac{\ln(x^3 + 1)x}{e^{-x}}$

10. Bestimme folgende Grenzwerte.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^3} - 1)^2 \cdot x^3}{(\sin x - x)^3}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

11. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = e^{-x} - x^3 .$$

(a) Zeige: f ist streng monoton fallend.

(b) Berechne $(f^{-1})'(1)$.

12. Zeige die Gültigkeit der Ungleichung

$$x < \arcsin x$$

für $x \in (0, 1)$.

13. Beweise die Identität

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

für $|x| < 1$.

14. Bestimme das Maximum und Minimum von xe^{-x} im Intervall $[0, 1]$.

15. Bestimme alle relativen Maxima und Minima von

(a) $f(x, y) = x^2 + xy^2 + 2y^2 - y^3$.

(b) $g(x, y) = \sin x - \cos y$ für $x, y \in [0, 2\pi]$.

16. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n n!} x^n$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$