Dr. Gerhard Baur
Dipl.-Math. Lukas Barthalomäus
B.Sc. Pascal Heiter
Adrian Spener

Analysis I
Sommersemester 2011

Analysis I - Übungsblatt 2

(Abgabe: Dienstag 26. April 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 27. April vor der ersten Übung.)

”The essence of mathematics is not to make simple things complicated, but to make complicated things simple.”
- *Stanley Gudder, Professor at the University of Denver.*

Aufgabe 6 *(Mengen I)* (1+1+1+2=5 Punkte)

(a) Gegeben seien die Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{FC Schalke 04, Manchester United, Real Madrid, FC Barcelona, Inter Mailand, Bayern München}\} \\ B &:= \{\text{Bayern München, FC Erzgebirge Aue, Manchester United}\} \\ C &:= \{\text{SpVgg Unterhaching}\}. \end{aligned}$$

Bilden Sie folgende Mengen $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(B)$, $B \times C$ und $C \times B$.

(b) Sei $X := \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} := \{\ \{2k\ :\ k \in \mathbb{N}\}\,,\ \{2k-1\ :\ k \in \mathbb{N}\}\}$. Bilden Sie die Menge

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \qquad \text{sowie} \qquad \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

(c) Sei $X := \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} := \{\ \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\} \ldots\}$. Bilden Sie die Menge

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \qquad \text{sowie} \qquad \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

(d) Gegeben seien die Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\ :\ x + y = 1 \right\} \\ B &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\ :\ \exists t \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie die Mengengleichheit $A = B$. *(Hinweis: Zeigen Sie $A \subset B$ und $B \subset A$.)*

Aufgabe 7 *(Rechenregeln für Mengen)* (2+1+2=5 Punkte)

Es seien A, B, C Mengen und X eine Obermenge, also $A \subset X$, $B \subset X$ und $C \subset X$. Zeigen Sie

(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Distributivgesetz)

(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (2. De Morgansches Gesetz)

(c) allgemeiner: Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen, so gilt

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c.$$

Aufgabe 8 *(Mengen II)* (2+3=5 Punkte)

Es seien A, B Mengen. Zeigen Sie

(a) Die Mengen $A \setminus B$, $B \setminus A$ sowie $A \cap B$ sind paarweise disjunkt (d.h. je zwei Mengen sind disjunkt) und es gilt

$$(A \setminus B) + (A \cap B) + (B \setminus A) = A \cup B$$

(b) $A \cap B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B$

Aufgabe 9 *(Mächtigkeit der Potenzmenge)* (5 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussage:

> Die Potenzmenge einer Menge aus $n \in \mathbb{N}$ Elementen besteht aus 2^n Elementen.