Dr. Gerhard Baur
Dipl.-Math. Lukas Barthalomäus
B.Sc. Pascal Heiter
Adrian Spener

Analysis I
Sommersemester 2011

Analysis I - Übungsblatt 3

(Abgabe: Dienstag 03. Mai 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 04. Mai vor der ersten Übung.)

"One of the endlessly alluring aspects of mathematics is that its thorniest paradoxes have a way of blooming into beautiful theories. " - *Philip J. Davis (*1923), American applied mathematician.*

Aufgabe 10 *(Komposition bijektiver Funktionen)* (2 Punkte)

Seien A, B, C Mengen und die Funktionen $f : B \to C$, $g : A \to B$ bijektiv. Zeigen Sie, dass $f \circ g : A \to C$ ebenfalls bijektiv ist mit

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Aufgabe 11 *(Geographie)* (2+2=4 Punkte)

Es seien folgende Mengen gegeben

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{Deutschland}, \text{Frankreich}, \text{Italien}, \text{Griechenland}, \text{Spanien}, \text{England}\} \\ B &:= \{\text{Paris}, \text{Berlin}, \text{Athen}, \text{München}, \text{Madrid}, \text{Mailand}, \text{Barcelona}, \text{Rom}, \text{London}\} \end{aligned}$$

Die Funktion $f : A \to B$ weise jedem Element aus A (Land) das zughörige Element aus B (Hauptstadt) zu. Die Funktion $g : B \to A$ weise jedem Element aus B das zugehörige Land zu.

(a) Entscheiden Sie, ob die Funktionen f, g surjektiv bzw. injektiv sind.

(b) Bestimmen Sie

$$\begin{aligned} &f(\{\text{Italien}, \text{Griechenland}, \text{England}\}), \quad f^{-1}(\{\text{Paris}, \text{Berlin}, \text{München}\}), \\ &g(\{\text{London}, \text{Rom}, \text{Mailand}\}), \quad g^{-1}(\{\text{Deutschland}\}). \end{aligned}$$

Aufgabe 12 *(Bild und Urbild)* (3+3=6 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $f : A \to B$, sowie Mengen $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$. Zeigen Sie

(a) $f^{-1}(f(A_1)) \supset A_1$ und es gilt sogar die Gleichheit beider Mengen, wenn f injektiv ist.

(b) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$ und es gilt sogar die Gleichheit beider Mengen, wenn f surjektiv ist.

Aufgabe 13 *(Mengenrelationen von Bild und Urbild)* (2+2+2* = 4(+2) Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $f : A \to B$, sowie $A_1 \subset A, A_2 \subset A$ und $B_1 \subset B, B_2 \subset B$. Zeigen Sie

(a) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

(c) Die Gleichheit der Mengen in (b) gilt genau dann, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 14 *(Komposition von Funktionen)* (2+2=4 Punkte)

Gegeben seien Funktionen $f : B \to C$, $g : A \to B$. Zeigen Sie

(a) $f \circ g$ injektiv $\Rightarrow g$ injektiv

(b) $f \circ g$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv