



Dr. Gerhard Baur  
Dipl.-Math. Lukas Bartholomäus  
B.Sc. Pascal Heiter  
Adrian Spener

Analysis I  
Sommersemester 2011

---

## Analysis I - Übungsblatt 6

(Abgabe: Dienstag 24. Mai 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 25. Mai vor der ersten Übung.)

”Mathematics consists in proving the most obvious thing in the least obvious way.”  
- *George Pólya, 1887-1985, Hungarian mathematician.*

---

### Aufgabe 24 (*Komplexe Zahlen*)

(6 Punkte)

Es sei  $z := 1 + 3i \in \mathbb{C}$  und  $w := 2 + i \in \mathbb{C}$ . Berechnen Sie

$$z + \bar{w}, \bar{z}w, |zw|, \frac{z}{w}, \operatorname{Re}(w^2) \text{ und } \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right).$$

und stellen Sie das Ergebnis in der Form  $x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  dar.

### Aufgabe 25 (*Geometrische Interpretation von komplexen Zahlen*)

(1+1+1=3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils entweder durch eine geometrische Überlegung mit Begründung oder durch eine Rechnung die Menge aller  $z \in \mathbb{C}$ , für die gilt

- (a)  $1 \leq |z - i| < 2$
- (b)  $|(z - i)(z + i)^{-1}| = 1$
- (c)  $|z - 1| + |z + 1| = 4$

und skizzieren Sie die zugehörigen Lösungsmengen.

### Aufgabe 26 (*Existenz von Quadratwurzeln bei komplexen Zahlen*)

(4 Punkte)

Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z + |z| \neq 0$  sei

$$w := \sqrt{|z|} \cdot \frac{z + |z|}{|z + |z||} \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass  $w$  eine Quadratwurzel von  $z$  ist, also  $w^2 = z$ . Berechnen Sie damit  $\sqrt{-7 + 24i}$ . Kann man auch im Fall  $z + |z| = 0$  eine Quadratwurzel angeben?

### Aufgabe 27 (*Irrationalität von $\sqrt{3}$* )

(2+1=3 Punkte)

- (a) Zeigen Sie analog zum Beweis von Euklid über die Irrationalität von  $\sqrt{2}$ , dass  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .
- (b) Woran scheidet die Beweistechnik aus Teilaufgabe (a), um etwa  $\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$  zu zeigen?

### Aufgabe 28 (*Möbiustransformation*)

(4 Punkte)

Es seien  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$  mit  $ad - bc \neq 0$ . Zeigen Sie, dass wenn  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , so ist auch

$$w := \frac{ax + b}{cx + d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

---

Mehr Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden Sie auf

<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/sommersemester-2011/analysis-i.html>

---