ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Dipl.-Math. Lukas Bartholomäus
B.Sc. Pascal Heiter
Adrian Spener

Analysis I
Sommersemester 2011

Analysis I - Übungsblatt 8

(Abgabe: Dienstag 07. Mai 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 08. Juni vor der ersten Übung.)

"The oldest, shortest words - "yes" and "no" - are those which require the most thought."
- Pythagoras of Samos, c. 570 - c. 495 BC, Ionian Greek philosopher and mathematician.

Aufgabe 35 *(Definition von Konvergenz)* (2 Punkte)

Geben Sie zu $\epsilon > 0$ explizit ein $N(\epsilon) \in \mathbb{R}$ an, für das gilt $|a_n - a| < \epsilon \; \forall n > N(\epsilon)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_n := \frac{1+2n}{1+3n}$$

sowie $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 36 *(Grenzwerte)* (1+1=2 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Beweisen Sie folgende Aussagen

(i) $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to a \; (n\to\infty) \Rightarrow \sqrt{a_n} \to \sqrt{a} \; (n \to \infty)$

(ii) $a_n \to a \; (n\to\infty)$ und $b_n \to b \; (n\to\infty) \Rightarrow \max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\} \; (n\to\infty)$

Aufgabe 37 *(Folgen)* (1+1+1+1+1+1+1+1=8 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für

(i) $a_n := \dfrac{n^3+7n^2+42}{6n^2+5n^3}$ (ii) $a_n := \dfrac{n^2+7n+6}{n^3+14}$ (iii) $a_n := \dfrac{n^2+6n+3}{7n-4}$

(iv) $a_n := \dfrac{n^{100}+5\cdot 2^n}{n^7+3\cdot 2^{n+1}}$ (v) $a_n := \dfrac{n^{70}+200^n+1}{n!}$ (vi) $a_n := \dfrac{3^n+(-1)^n\cdot 3^n}{2^n}$

(vii) $a_n := \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $(viii)$ $a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Aufgabe 38 *(Landau-Symbolik)* (1+1+1+1+1+1=6 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen

(i) $\mathcal{O}(a_n) + \mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n)$

(ii) $o(a_n) + o(a_n) = o(a_n)$

(iii) $\mathcal{O}(a_n) \cdot \mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n)$

(iv) $o(a_n) \cdot o(a_n) = o(a_n)$

(v) $b_n = \mathcal{O}(a_n)$, $c_n = \mathcal{O}(b_n) \Rightarrow b_n + c_n = \mathcal{O}(a_n)$

(vi) $a_n \sim b_n \Rightarrow a_n - b_n \to 0 \; (n\to\infty)$.

Aufgabe 39 *(Konvergenz von Partialsummen)* (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folgen

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{und} \qquad b_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

für $n \to \infty$ konvergieren.