



Dr. Gerhard Baur  
Dipl.-Math. Lukas Bartholomäus  
B.Sc. Pascal Heiter  
Adrian Spener

Analysis I  
Sommersemester 2011

## Analysis I - Übungsblatt 11

(Abgabe: Dienstag 28. Juni 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 29. Juni vor der ersten Übung.)

"Logic is invincible because in order to combat logic it is necessary to use logic."  
- *Pierre Léon Boutroux, 1880 - 1922, French mathematician.*

### Aufgabe 50 (Dezimalbruchentwicklung)

(5+1=6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass zu jedem  $x \in (0, 1]$  Zahlen  $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  für  $k = 1, 2, \dots$  existieren mit

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k},$$

sowie

$$r_n = x - \sum_{k=1}^n a_k 10^{-k} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Hinweis: Setze  $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  so, dass  $r_n \cdot 10^n \in (0, 1]$ .*

(b) Berechnen Sie die Bruchdarstellung für  $x = 0,0\overline{12}$ .

### Aufgabe 51 (Cauchy-Produkt)

(5 Punkte)

Zeigen Sie folgende Identität

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} z^k = \frac{1}{(1-z)^3} \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1.$$

### Aufgabe 52 (Trigonometrische Funktionen)

(1+1+1+1+2=6 Punkte)

Zeigen Sie für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  derart, dass auftretende Nenner nicht Null sind,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \tan(-x) &= -\tan x & \text{(ii)} \quad \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} & \text{(iii)} \quad \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \text{(iv)} \quad \sin x &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) & \text{(v)} \quad \sin(5x) &= 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x \end{aligned}$$

### Aufgabe 53 (Cosinus hyperbolicus)

(1+1+1=3 Punkte)

Beweisen Sie jeweils von Satz 51 die ersten Teile von (i), (iii) und (iv), d.h. zeigen Sie für  $x, y \in \mathbb{C}$  folgende Aussagen

$$\text{(i)} \quad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{(iii)} \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad \text{(iv)} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Mehr Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden Sie auf

<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/sommersemester-2011/analysis-i.html>