



---

Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Übungsblatt Nr. 11

(Abgabe zu **zweit** am 06.07.2012 bis 8.10 Uhr im Briefkasten vor dem H3 (unterstes Fach!))

---

**Aufgabe 51**

(3 · 1 + 2 · 3 = 9 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Relationen für  $x, y \in \mathbb{R}$ , wenn  $x$  und  $y$  so gewählt werden, dass die auftretenden Nenner ungleich Null sind.

a)  $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

b)  $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

c)  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

d)  $\sin(5x) = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x$

e)  $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f)  $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

**Aufgabe 52**

(2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie für  $x, y \in \mathbb{R}$  die folgenden Relationen für hyperbolische Funktionen.

a)  $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

b)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

**Aufgabe 53**

(4 Punkte)

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & , \text{für } x \neq 0 \\ 1 & , \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des  $\epsilon - \delta$ -Kriteriums die Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $a = 0$ .

**Aufgabe 54**

(2+2+2=6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Stellen  $a$ , an denen die folgenden Funktionen stetig sind.

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \ln(x^2 + 1)$

b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} x & , x \leq 3 \\ x^2 & , x > 3 \end{cases}$

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^\alpha$ , wobei  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$  für  $\alpha > 0$  gilt.

**Aufgabe 55**

(3 Punkte)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann definieren wir

$f$  erfüllt auf  $I$  eine *Lipschitz-Bedingung*  $:\Leftrightarrow \exists L > 0$  mit  $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in I$

Zeigen Sie, dass wenn  $f$  auf  $I$  eine Lipschitz-Bedingung erfüllt,  $f$  auch stetig auf  $I$  ist.