ulm university universität ulm

Dr. Gerhard Baur
Matthias Zimmermann
Sommersemester 2012

# Analysis I für Informatiker und Ingenieure
## Übungsblatt Nr. 7

(Abgabe zu **zweit** am 08.06.2012 bis 8.10 Uhr im Briefkasten vor dem H3 (unterstes Fach!))

**Aufgabe 31** (4 · 3 = 12 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden unbestimmten Ausdrücke auf ihr Verhalten für $n \to \infty$.
*Tipp: Für diese Aufgabe dürfen Sie annehmen, dass für eine reelle Folge* $(a_n)$ *mit positiven Folgenglieder aus* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$ *folgt.*

a) $\frac{\infty}{\infty}$:

i) $\frac{3^n+n^5\cdot 2^n}{3^{n+1}}$ , ii) $\frac{(n+1)^2+3}{2n+5}$ , iii) $\frac{2^n}{n!}$ ,

b) $0 \cdot \infty$:

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (n^7+n^3)$ ii) $\frac{1}{\sqrt{2n^2+n}} \cdot 3n$ iii) $\frac{1}{\sqrt{n}}(n-1)$ ,

c) $\infty - \infty$:

i) $n! - (3!)^n$ , ii) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ , iii) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ ,

d) $1^\infty$:

i) $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{n+3}$ , ii) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ , iii) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$ .

**Aufgabe 32** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ streng monoton wachsend ist.

**Aufgabe 33** (3 Punkte)

Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

für ein festes $k \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 34** (2+2+2=6 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

a) $a_n = o(b_n)$, $b_n = o(c_n) \Rightarrow a_n = o(c_n)$ ,

b) $\mathcal{O}(a_n) \cdot \mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(a_n)$ ,

c) $\mathcal{O}(a_n) + o(b_n) = \mathcal{O}(a_n)$ mit $a_n = o(b_n)$ .

**Aufgabe 35** (2 Punkte)

Zeigen Sie das folgende asymptotisches Verhalten für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,.$$