Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Lösungen zu Blatt 5

(Abgabe: Donnerstag, 24. Mai 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 15 *(Fundamentalsysteme)* (6 Punkte)

Finde ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Zunächst berechnet man das charakteristische Polynom und daraus die jeweiligen Eigenwerte.

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2 = (-\lambda^2 + 2)(\lambda - 1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{2}: \quad \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{2}: \quad \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ reele Lösungen: } e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, e^{-\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

Es bleibt zu überprüfen ob es sich wirklich um ein Fundamentalsystem handelt.

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{1-\sqrt{2}} & -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem.

Aufgabe 16 *(Fundamentalsysteme)* (6 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$ für $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ wobei $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt.

Lösung:
Zunächst berechnet man das charakteristische Polynom und daraus die jeweiligen Eigenwerte.

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = ... = ((3+4i) - \lambda)((3-4i) - \lambda)$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 + 4i \quad \lambda_2 = 3 - 4i$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 3 + 4i \qquad \begin{pmatrix} -4i & 4 \\ -4 & -4i \end{pmatrix} c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 - 4i \qquad \begin{pmatrix} 4i & 4 \\ -4 & 4i \end{pmatrix} c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{(3+4i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, e^{(3-4i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die reelle Lösungen:

$$x_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ -\sin(4t) \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -\sin(-4t) \\ \cos(-4t) \end{pmatrix}$$

Dabei erfüllt nur $x_1(t)$ das AWP.