Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Sommersemester 2015
7. Mai 2015
Blatt 4

# Übungen zu Analysis 1

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html)

(Abgabe am Freitag, den 15.05.15, bis 8.15 Uhr im H14)

15. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ .
    (a) Zeigen Sie: Für $M = (a, b]$ gilt $\inf M = a$, $\sup M = b$, $\min M$ existiert nicht und $\max M = b$ .
    (b) Zeigen Sie: Für $M = [a, \infty)$ gilt $\inf M = a$, $\sup M$ existiert nicht, $\min M = a$ und $\max M$ existiert nicht.
    (c) Bestimmen Sie $\inf M$, $\sup M$, $\min M$ und $\max M$ für $M = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq |1 + x|\}$.

    (3+3+3 = 9 Punkte)

16. Sei $K$ ein angeordneter Körper und $A, B \subset K$ mit $A, B \neq \emptyset$ . Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
    (a) $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |b - a|}{2} \qquad \forall a, b \in K.$
    (b) Ist $A \subset B$ und existieren $\min A$ und $\min B$ , so ist $\min A \geq \min B$ .
    (c) Ist $A \subset B$ und existieren $\inf A$ und $\inf B$ , so ist $\inf A \geq \inf B$ .
    (d) Gilt $a \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$ und $K = \mathbb{R}$ , so $\exists \sup A, \inf B$ und es gilt: $\sup A \leq \inf B$ .

    (2+2+2+2 = 8 Punkte)

17. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0\ \ (i = 1, \ldots, n)$ : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$

    **Hinweis:** $\prod$ ist das Produktzeichen und analog zum Summenzeichen $\sum$ definiert, d.h. zum Beispiel $\displaystyle\prod_{i=1}^{3} x_i = x_1 x_2 x_3$ .

    (5 Punkte)

18. Zeigen Sie
    (a) Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist von der Form $n = 3k, n = 3k + 1$ oder $n = 3k + 2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.
    (b) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
    (c) * Woran scheitert der Beweis von Teil (b), wenn wir $\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$ zeigen wollten? (**Bonusaufgabe**)

    (3+5+2* = 8+ 2* Punkte)