Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Sommersemester 2015
20. Mai 2015
Blatt 6

Übungen zu Analysis 1

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html)

(Abgabe am Freitag, den 29.05.15, bis 8.15 Uhr im H14)

25. Beweisen Sie folgende Ungleichungen:

   (a) Für $k \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:

   $$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right) \leq \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}$$

   (b) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

   $$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^k}{(k-2)!}$$

   (4+4 = 8 Punkte)

26. Bestimmen Sie (ein) $a \in \mathbb{R}$ und geben Sie zu $\varepsilon > 0$ explizit ein $N = N(\varepsilon)$ an, für das $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n > N$ gilt mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_n = \dfrac{1+2n}{3n-1}$ (3 Punkte)

27. Berechnen Sie, falls existent, den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   (a) $a_n := \dfrac{3n^2 - 2n^3 + 4}{4n + n^3 - 8}$ (b) $a_n := \dfrac{2^n \cdot n^4 + 3^n \cdot n}{2 \cdot 3^n - n^7 + 1}$ (c) $a_n := n^{30}\left(\dfrac{2-2i}{3}\right)^n$

   (d) $a_n := \dfrac{2^n + (-2)^n}{5 \cdot 2^n}$ (e) $a_n := \dfrac{n^n}{n!}$ (f) $a_n := \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$

   (g) $a_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

   (je 1 Punkt, also gesamt 7 Punkte)

28. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to a\ (n \to \infty) \Rightarrow \sqrt{a_n} \to \sqrt{a}\ (n \to \infty)$

   (b) $a_n \to a\ (n \to \infty)$ und $b_n \to b\ (n \to \infty) \Rightarrow \max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\}\ (n \to \infty)$

   (4+2 = 6 Punkte)

29. Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Finden Sie relle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   (a) $a_n \to 0\ (n \to \infty),\ b_n$ unbeschränkt, sodass

(i) $a_n \cdot b_n \to 0$ (ii) $a_n \cdot b_n$ unbeschränkt (iii) $a_n \cdot b_n \to \alpha$

(b) $a_n,\ b_n$ unbeschränkt,sodass

(i) $a_n - b_n \to 0$ (ii) $a_n - b_n$ unbeschränkt (iii) $a_n - b_n \to \alpha$.

(3 +3 = 6 Punkte)