

Übungen zu Analysis 1

(<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html>)

(Abgabe am Freitag, den 12.06.15, bis 8.15 Uhr im H14)

36. Zeigen Sie folgende Aussage:

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $s := \sup M$ existiere. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $x_n \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$. (3 Punkte)

37. Berechnen Sie alle Lösungen von:

- (a) $2^{7-x} \cdot 5^{2x-4} = 20^{x-1}$
(b) $\log x - \log(8x) + \log(x^3) = 0$.

(2+2=4 Punkte)

38. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (a) $a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \rightarrow e^a \quad (n \rightarrow \infty)$.
(b) $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$.
(c) $a_n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \log a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.
(d) $a_n \rightarrow a > 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \log a_n \rightarrow \log a \quad (n \rightarrow \infty)$.

(3+2+2+2 = 9 Punkte)

39. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$$

für jede beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

40. Bestimmen Sie limes superior und limes inferior von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- (a) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n} + \log(n^7 + 1)}{\sqrt[6]{n^2} - 1}$ (c) $a_n = \left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{n+1}$.
(b) $a_n = n - 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

(je 2 Punkte)

41. Finden Sie eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$, die unendlich viele Häufungswerte besitzt.

(3 Punkte)