Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Sommersemester 2015
16. April 2015
Blatt 1

Übungen zu Analysis 1

(`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html`)

(Abgabe am Freitag, den 24.04.15, bis 8.15 Uhr im H14)

1. Zeigen Sie folgende Gleichungen:

   (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$, für alle $n \in \mathbb{N}$

   (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, für alle $n \in \mathbb{N}$

   (3 + 3 = 6 Punkte)

2. Zeigen Sie folgende Aussagen:

   (i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $17^n - 4^n$ ist durch 13 teilbar; wobei Teilbarkeit bedeutet, dass ein ganzzahliges k existiert, sodass $13 \cdot k = 17^n - 4^n$

   (ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{1}{2^n} \geq 1 - \frac{n}{2}$

   (3 + 3 = 6 Punkte)

3. (i) Gegeben seien die Mengen:

   $A :=$ {VfB Stuttgart, FC Bayern München, SSV Ulm 1846, SC Freiburg, FC Augsburg}
   $B :=$ {SSV Ulm 1846, FC Augsburg, Manchester United}
   $C :=$ {Real Madrid}
   $D := \emptyset$

   Bilden Sie die folgenden Mengen: $A \cap B$, $D \cup B$, $B \times C$, $C \times B$, $\mathcal{P}(B)$, $D \setminus C$.

   (ii) Sei $X := \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} := \{\{2k : k \in \mathbb{N}\}, \{2k-1 : k \in \mathbb{N}\}\}$. Bilden Sie die Mengen $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ sowie $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.

   (iii) Sei $X := \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} := \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \dots\}$. Bilden Sie die Mengen $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ sowie $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.

   (3 + 1 + 1 = 5 Punkte)

4. Es seien A, B, X Mengen. Zeigen Sie:

   (i) $(A \setminus B) + (A \cap B) + (B \setminus A) = A \cup B$

   (ii) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

   (iii) $(A \cup B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}$

(iv) Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen, so gilt:

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{\mathrm{C}}$$

(2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)

5. Sei $a_0 := 0$, $a_1 := 3$ und $a_{n+1} = 7 \cdot a_n - 10 \cdot a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Zeige: $a_n = 5^n - 2^n$, für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

   (ii) Betrachte:

   (I) Aussage: $a_n = 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n$, für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

   (II) Induktionsanfang $(n = 0)$:
   $a_0 = 2 \cdot 5^0 - 2 \cdot 2^0 = 2 - 2 = 0$

   (III) Induktionshypothese: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   (IV) Induktionsschluss:
   $a_{n+1} = 7 \cdot a_n - 10 \cdot a_{n-1} \overset{\text{IH.}}{=} 7 \cdot (2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n) - 10 \cdot (2 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}) = 2 \cdot 5^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1}$

   (V) Mit dem Induktionsprinzip gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   Was gilt nun $a_n = 5^n - 2^n$ oder $a_n = 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n$? Wo liegt der Fehler?

(3 + 2 = 5 Punkte)