Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Sommersemester 2015
12. Juni 2015
Blatt 10

Übungen zu Analysis 1

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html)

(Abgabe am Freitag, den 26.06.15, bis 8.15 Uhr im H14)

47. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+3k+2}{2} \cdot z^k = \frac{1}{(1-z)^3}$$

(4 Punkte)

48. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{-1}$$

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert und (a_n) eine Nullfolge ist. (5 Punkte)

49. Wir definieren die hyperbolischen Funktion $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgendermaßen:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften dieser Funktionen für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

(b) $\cosh x = \cosh(-x)$ und $\sinh x = -\sinh(-x)$

(c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(d) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(4+2+3+2 = 11 Punkte)

50. Betrachten Sie für $z \in \mathbb{C}$ und festes $z_0 \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{k^2}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert (absolut bzw. bedingt) und für welche $z \in \mathbb{C}$ divergiert diese Reihe? (4 Punkte)

51. Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 42. Betrachten Sie $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $t_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ und zeigen Sie $s_{2n} = t_{2n} - t_n$. (6 Punkte)