Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Sommersemester 2015
13. Mai 2015
Blatt 5

Übungen zu Analysis 1

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html)

(Abgabe am Freitag, den 22.05.15, bis 8.15 Uhr im H14)

19. Es sei $z := 1 + 4i \in \mathbb{C}$ und $w := 3 + i \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie

$$z + \bar{w},\ \bar{z}w,\ |zw|,\ \frac{z}{w},\ \mathrm{Re}(w^2) \text{ und } \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$$

und stellen Sie das Ergebnis in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar. (6 Punkte)

20. Bestimmen Sie jeweils entweder durch eine geometrische Überlegung mit Begründung oder durch eine Rechnung die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die gilt

(i) $|z| \leq |z + 1|$

(ii) $1 \leq |z - i| < 2$

und skizzieren Sie die zugehörigen Mengen. (2 + 2 = 4 Punkte)

21. Berechnen Sie folgende Werte

$$\binom{42}{40},\ \binom{\frac{2}{3}}{4},\ \binom{-1}{k} \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0,\ \binom{i}{3}$$

(4 Punkte)

22. Leiten Sie mit geeigneten Summationstechniken eine Formel für $\sum_{k=0}^{n} k^3$ her.

(5 Punkte)

23. (i) Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige $z^n - w^n = (z - w) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k-1}$.

(ii) Eine Abbildung $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $z, a_k \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ wird komplexes Polynom vom Grad n genannt. Für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ gelte $p(z_0) = 0$, d.h z_0 ist eine Nullstelle von p . Zeige: $p(z)$ lässt sich darstellen als $(z - z_0) \cdot \tilde{p}(z)$, wobei $\tilde{p}(z)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

(3 + 3 = 6 Punkte)

24. Zeige:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(5 Punkte)