Gerhard Baur
Matthias Heinlein

Sommersemester 2015
28. April 2015
Blatt 3

Übungen zu Elemente der Topologie

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/topologie.html)

(Abgabe und Besprechung am Mittwoch, den 06.05.15 um 12:00 in HeHo18/220)

Bitte tragt euch in der Mailingliste ein! Link steht auf der Homepage.

Aufgaben 9 und 10: schriftlich abgeben. Aufgabe 11: Vorrechnen

9. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X . Zeige:

$$int\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in I} int(A_\alpha).$$

Zeige weiter, dass Gleichheit gilt, wenn die Indexmenge I endlich ist. Gib ein Beispiel an, in dem keine Gleichheit gilt.

(6 Punkte)

10. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Zeige:

(a)

$$\overline{A^C}^C = \overset{\circ}{A},$$

(b)

$$\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}} = \overset{\circ}{\overline{A}}.$$

(3+3=6 Punkte)

11. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Man wendet auf A nun beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge die Operationen Abschluss und Komplement an. Man kann zeigen, dass man dadurch nur endlich viele verschiedene Mengen erzeugen kann.
Beispiel: Für die Menge $A = (0,1) \cup (1,2)$ in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie sind es $(0,1) \cup (1,2)$, $[0,2]$, $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$, $(-\infty,0] \cup [2,\infty)$, $(0,2)$ und $(-\infty,0] \cup [1,1] \cup [2,\infty,)$.

(a) Zeige, dass man allgemein durch Komplement- und Abschlussbildung höchstens 14 verschiedene Mengen erzeugen kann.

(b) Finde eine Menge A , mit der sich 14 verschiedene Mengen erzeugen lassen und gib diese 14 Mengen an. Tipp: Das geht schon in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie.

(4+7=13 Punkte)