

Übungen zu Elemente der Topologie

(<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/topologie.html>)

(Abgabe und Besprechung am Mittwoch, den 20.05.15 um 12:00 in HeHo18/220)

Bitte die Übungsblätter nur alleine abgeben. Doppelabgaben werden ab diesem Blatt nicht mehr gewertet.

Aufgaben 16 und 17: Abgeben, Aufgaben 18 und 19: Vorrechnen

16. Sei X eine nicht-endliche Menge und \mathcal{T} die Topologie, die aus der leeren Menge und den Komplementen der abzählbaren Teilmengen von X besteht. Zeige: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie schließlich konstant ist, d.h. sie ist konstant bis auf endlich viele Ausnahmen.

(4 Punkte)

17. Sei $Id : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ die Identitätsfunktion zwischen zwei topologischen Räumen über derselben Grundmenge, d.h. $\forall x \in X$ gilt $Id(x) = x$.

- (a) Wann ist Id eine stetige Funktion?
(b) Wann ist Id ein Homöomorphismus?

(2+2=4 Punkte)

18. Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt folgenstetig, falls

$$\forall x \in X \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \text{ mit } x_n \rightarrow x \text{ (bzgl. } \mathcal{T}_X \text{) gilt:}$$
$$f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ (bzgl. } \mathcal{T}_Y \text{)}$$

- (a) Zeige, dass eine stetige Funktion auf (X, \mathcal{T}) immer auch folgenstetig ist.
(b) Zeige, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht richtig ist.

(4+2=6 Punkte)

19. Unter einer affinen Funktion im \mathbb{R}^n verstehen wir eine Funktion $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Aus der Analysis ist bekannt, dass affine Funktionen stetig bzgl. der euklidischen Topologie sind.

- (a) Unter welchen Voraussetzungen ist eine affine Funktion ein Homöomorphismus?
(b) Zeige: Zwei Kreislinien im \mathbb{R}^3 sind homöomorph zueinander.
(c) Sei R_1 die Vereinigung zweier disjunkter, ineinanderhängender Kreislinien im \mathbb{R}^3 , R_2 die Vereinigung zweier nicht ineinanderhängender disjunkter Kreislinien im \mathbb{R}^3 . Sind R_1 und R_2 homöomorph?

(2+3+3=8 Punkte)