Gerhard Baur
Matthias Heinlein

Sommersemester 2015
2. Juli 2015
Blatt 12

Übungen zu Elemente der Topologie

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/topologie.html)

(Abgabe und Besprechung am Mittwoch, den 08.07.15 um 12:00 in HeHo18/220)

Abgeben: 39, 40, Vorrechnen: 41, 42

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, Y eine Menge und $q : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Dann heißt $\mathcal{T}_q = \{U \subset Y \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$ die von q induzierte Quotentientopologie auf Y .

39. Zeige, dass $\mathcal{T}_q$ eine Topologie ist und ferner die feinste Topologie auf Y , sodass q stetig ist. (4 Punkte)

Ist eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X gegeben, so wird die von $\sim$ induzierte Quotiententopologie auf $Y = X/\sim$ über die Abbildung $q(x) = [x]$, die jedes Element auf seine Äquivalenzklasse abbildet, definiert.
Ist hingegen eine Menge $Z \subset X$ von Punkten gegeben, die in Y "‘identifiziert werden sollen"’, so kann man die durch Z induzierte Quotiententopologie auf $Y = X/Z$ über die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & \text{oder} \\ x, y \in Z \end{cases}$$

definieren.

40. Sei $X = [0, 1]$ mit der euklidischen Topologie. Nun werden die Punkte 0 und 1 verklebt, d.h. man identifiziert $Z = \{0, 1\}$. Welches geometrische Objekt erhält man? Wie sieht die entsprechende Äquivalenzrelation und wie die passende surjektive Abbildung q aus?

    (4 Punkte)

41. Auch der Zylinder, das Möbiusband und der Torus können aus einer einfachen Grundmenge mittels eine Äquivalenzrelation gebildet werden.

    Erkläre, wie das geht. (9 Punkte)

42. Kann man den Einheitskreis durch passende Quotientenbildung aus der punktierten komplexen Ebene erhalten?

    (3 Punkte)