Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
24 Punkte

Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 6 -

Abgabe: Freitag, den 2.6.2017 um 08:10 im Hörsaal 22

Aufgabe 1: (9 Punkte)

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ stetig? Begründe jeweils.

$$f_1(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x < 0 \\ x^2 - 1, \text{ falls } x \geq 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \end{cases} \qquad f_3(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

Tipp für f_3: Betrachte $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{Z}$ separat.

(b) Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Funktion stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist und $f(-7) = -13$ gilt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} ax + b, \text{ falls } x \leq 0 \\ e^{bx}, \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$

(c) Zeige, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \chi(x)$, wobei

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nicht existiert.
Tipp: Wähle geschickt zwei Folgen.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Die folgenden vier gebrochen rationalen Funktionen haben jeweils bei $x = 1$ im Nenner eine Nullstelle. Untersuche jeweils $\lim\limits_{x \to 1} f_i(x)$ für $i = 1, 2, 3, 4$, und setze die Funktionen, falls möglich, bei $x = 1$ stetig fort.

$$f_1(x) = \frac{x+2}{x-1}, \; f_2(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}, \; f_3(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{x-1}, \; f_4(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3}$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit dem Zwischenwertsatz.

(a) Es sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeige, dass ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = x^*$ existiert.
Tipp und Bemerkung: Verwende die Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - x$. Ein solches x^* nennt man manchmal Fixpunkt von f.

(b) Wir betrachten die Gleichung

$$\tan(x) = 1 - \sin(x)$$

(i) Zeige, dass diese Gleichung eine Lösung im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ besitzt.

(ii) Bestimme ein Näherungsintervall dieser Lösung mithilfe des Bisektionsverfahrens, wie es in der Vorlesung in einem Beweis benutzt wurde. Verwende dazu 3 Iterationen.
Bemerkung: Es darf vorausgesetzt werden, dass es nur eine Lösung $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ gibt. Bei dieser Aufgabe kann natürlich ein Taschrenrechner verwendet werden.

(iii) Wie wieviele Iterationen braucht man, bis das Intervall nur noch eine Länge von höchstens $\frac{1}{1000}$ hat?

Aufgabe 4: (4 Punkte)

(a) Zeige, dass $\max(A)$ für eine Menge A eindeutig ist, so es existiert.

(b) Gib $\min(A), \max(A), \inf(A), \sup(A)$ für folgende Mengen A an (Angabe genügt, kein Nachweis nötig):

(i) $A = (0, 1)$ (ii) $A = \left\{ \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}$ (iii) $A = \left\{ \frac{1}{n+m} + \frac{1}{n} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}$

Aufgabe 5: (3 Punkte)
In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem *Satz von Weierstraß*. Dieser lautet:

Stetige Funktionen haben in einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b]$ *jeweils Maximal- und Minimalstellen.*

Diese Aufgabe soll zeigen, dass auf keine der Voraussetzungen *abgeschlossen*, *beschränkt* und *stetig* verzichtet werden kann.
Gib für die folgenden drei Fälle jeweils eine Beispielfunktion f mit zugehörigem Intervall an, die die jeweils gewünschten Eigenschaften erfüllt, aber keine Maximalstelle (oder Minimalstelle oder keines von beidem, ganz nach Belieben) in dem jeweiligen Intervall hat.

(a) f stetig, Intervall nicht beschränkt.

(b) f stetig, Intervall nicht abgeschlossen.

(c) f unstetig, Intervall beschränkt & abgeschlossen.