Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
24+4 Punkte

Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 9 -

Abgabe: Freitag, den 23.6.2017 um 08:10 im Hörsaal 22

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimmte folgende Grenzwerte mithilfe von de l'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}x^2$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(x)-1}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x\left(\arctan(x)-\frac{\pi}{2}\right)}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^m+1)}{\ln(x^n)}$ mit $m,n\in\mathbb{N}$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Zeige mithilfe von Differentialrechnung, dass

$$e^x \ \geq 1+x \text{ für } x\in\mathbb{R}$$

und skizziere den Sachverhalt.

Hinweis: Zeige die Ungleichung zunächst für $x \geq 0$. Zeige anschließend den Fall $x \leq 0$. Dies funktioniert zum Beispiel unter Benutzung des Falls $x \geq 0$, es gibt aber auch andere Möglichkeiten.

Aufgabe 3: (4 Punkte + 4 Zusatzpunkte[1])

(a) Wir betrachten die *logistische Wachstumskurve*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ mit } f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

Zeige, dass f monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist, bestimme, falls existent, Wendepunkte und gib diejenigen Intervalle an, in denen f konvex bzw. konkav ist.
Für welche Modelle könnte eine solche Wachstumskurve geeignet sein?

(b) Betrachte nun die Funktion

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R} \text{ mit } f(x)=x^x$$

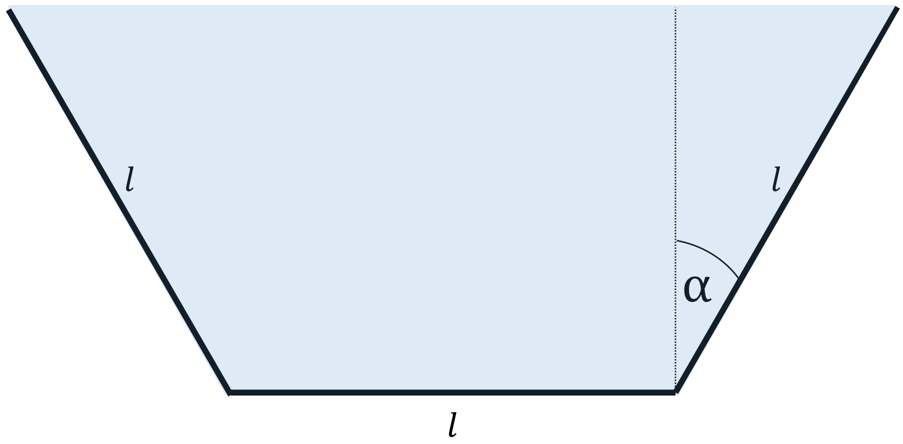
Bestimme, falls existent, Nullstellen, lokale und globale Minima und Maxima, Wendepunkte, Intervalle, in denen f monoton wachsend bzw monoton fallend ist, Intervalle, in denen f konvex bzw konkav ist sowie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ und skizziere den Graphen von f.

[1] Teil (a) gibt reguläre 4 Punkte, Teil (b) gibt 4 Zusatzpunkte.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Wir betrachten den Querschnitt einer Regenrinne wie in der Abbildung, wobei $l > 0$ gegeben ist. Ziel ist nun, die Regenrinne so zu konstruieren, dass sie möglichst viel Wasser aufnehmen kann. Dazu möchte man gerne den Winkel α so bestimmen, dass die eingezeichnete Fläche maximal wird (denn dann wird auch das Volumen maximal). Bestimme nun also eine Funktion, die abhängig von α den Flächeninhalt angibt und maximiere diese! Gib anschließend den optimalen Winkel α in Grad an.

Hinweis: Überlege, welche Werte von α hier überhaupt Sinn machen. Übrigens: In einem rechtwinkligen Dreieck ist $\sin(\cdot)$ *ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypothenuse und* $\cos(\cdot)$ *das Verhältnis von Ankathete zu Hypothenuse.*



Aufgabe 5: (6 Punkte)

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar und konvex, d.h. $f''(x) \geq 0$ für $x \in I$. In dieser Aufgabe wollen wir eine andere Charakterisierung von Konvexität beweisen.

(a) Zeige, dass für jeden Punkt $a \in I$ die Ungleichung

$$f(x) \geq t(x) \ \forall x \in I$$

gilt, wobei t die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$ ist. Skizziere zusätzlich den Sachverhalt.

Tipp: Mittelwertsatz. Erinnerung: $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

(b) Zeige nun mithilfe von (a), dass die Ungleichung

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt. Skizziere zusätzlich den Sachverhalt.

(c) Benutze nun die Resultate dieser Aufgabe, um einen alternativen Beweis für die Aussage aus Aufgabe 2 zu geben.