Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
24+3 Punkte

Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 10 -

Abgabe: **Dienstag, den 04.07.2017 um 14:00 im Hörsaal 22**

Am 30.06. findet von 8:00 - 10:00 Uhr Vorlesung anstatt Übung statt, dafür findet am 04.07.2017 von 14:00 - 16:00 Übung anstatt Vorlesung statt. Blatt 11 wird dennoch am 29.06 veröffentlicht.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(a) In §2 des des 3. Kapitels haben wir um die Ableitung der Exponentialfunktion zu bestimmen ohne Beweis benutzt, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Zeige diesen Grenzwert nun *mithilfe der Taylorreihe von e^x aus der Vorlesung*!

(b) In der Vorlesung wurde die Darstellung $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hergeleitet. Neben dieser Darstellung gilt auch die Folgende:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Zeige, dass diese Darstellung stimmt, berechne also den Grenzwert auf der rechten Seite.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Ein bekanntes Paradoxon, das Paradoxon von Zenon, ist das Folgende:

Achilles und eine Schildkröte machen ein Wettrennen. Offensichtlich ist Achilles, als schnellster Läufer der Antike, schneller als die Schildkröte, sagen wir 10 mal so schnell, und lässt ihr einen Vorsprung von a_0. Zenon argumentiert nun, dass Achilles die Schildkröte niemals einholen wird, und zwar wie folgt: In der Zeit t_0, in der Achilles auf den Startpunkt der Schildkröte rennt, hat die Schildkröte einen Weg von a_1 zurückgelegt (also nach Zeit t_0 ist Achilles auf der Position a_0 und die Schildkröte auf der Position $a_0 + a_1$). Genauso legt die Schildkröte in der Zeit t_1, die Achilles braucht, um auf die Position $a_0 + a_1$ zu sprinten, eine Strecke a_2 zurück. Dies kann man beliebig fortführen und erhält, dass Achilles $T = \sum_{k=0}^{\infty} t_k$ viel Zeit braucht, um die Schildkröte einzuholen. Da die $t_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sind, ist also T unendlich und Achilles holt die Schildkröte niemals ein.

Wo liegt der Fehler in der Argumentation? Löse dieses Paradoxon mit unseren Methoden!

Hinweis: Berechne die t_k in Abhängigkeit von a_0 und der Geschwindigkeit des Achilles und berechne den Wert von T.

Aufgabe 3: (10 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

(a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$.

(i) Berechne mithilfe des Satzes von Taylor $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf einen Fehler von 10^{-4} genau.

(ii) Lässt sich, wie bei der Exponentialfunktion, die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auch als unendliche Reihe schreiben? Begründe und gib im positiven Falle die resultierende Reihe an.

(b) Wir betrachten nun die Funktion $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = \sqrt{1+x}$.

  (i) Bestimme das dritte Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $a = 0$.

  (ii) Zeige die Restgliedabschätzung $|R_4(x)| < \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$ für $|x| < \frac{1}{5}$, wobei $R_4(x)$ das Lagrangesche Restglied bezeichnet.

  (iii) Berechne mithilfe von (b) die Werte von $\sqrt{5}$ und $\sqrt{7}$ bis auf einen Fehler von 10^{-3}. *Achtung: Man bemerke, für welche x die Fehlerabschätzung in (b) gilt!*[1].

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Zeige, dass $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ sich darstellen lässt als $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$ wobei $b_k = \sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} c_l a^{l-k}$.

Bemerkung: Man hat also erreicht, dass man f als Polynom in $(x-a)$ schreibt.

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Untersuche für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ob und ggfs. was für ein Extremum an der Stelle $x = 1$ vorliegt, wobei

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$
$$g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

[1] Diese Teilaufgabe gibt 3 Zusatzpunkte.