ulm university universität ulm

Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
24+6 Punkte

Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 11 -

Abgabe: Freitag, den 07.07.2017 um 8:10 im Hörsaal 22.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ und möchten das Integral $\int_0^1 f(x)\ dx$ ausrechnen. Betrachte dazu die Partition $Z_n := \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ von $[0, 1]$.

(a) Berechne die Obersumme $O(f, Z_n)$ sowie die Untersumme $U(f, Z_n)$. Gib beide Ausdrücke ohne Summenzeichen an.

(b) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} O(f, Z_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} U(f, Z_n)$.

(c) Was sollte in Anbetracht von Teil (b) wohl für $\int_0^1 e^x\ dx$ herauskommen?
Verifiziere dies mithilfe des Hauptsatzes der D/I-Rechnung.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Betrachte nun die Funktion $F : [0, 3) \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$.

Berechne $F(x)$ für $x \in [0, 3)$. Wo ist F stetig, wo differenzierbar?
Zeichne zusätzlich sowohl F als auch f in ein gemeinsames Schaubild für $x \in [0, 3)$. Was fällt auf?

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I. Zeige:

$$\exists \xi \in I : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Berechne folgende Integrale mit dem Hauptsatz der D/I-Rechnung:

(a) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\ dx$

(b) $\int_{-2}^1 x^2 - 2x + 1\ dx$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx$

(d) $\int_0^3 e^{2x}\ dx$

(e) $\int_1^e \frac{1}{x}\ dx$

(f) $\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\ dx$

Aufgabe 5: (5 Punkte + 6 Zusatzpunkte)[1]

Wir beschäftigen uns nun mit einem einfachen Algorithmus zur *numerischen Integration.* Es sei also $f \in R[a,b]$ zweimal stetig differenzierbar. Ziel ist, das Integral $\int_a^b f(x)\ dx$ zu approximieren. Eine erste Überlegung ist, den Graphen von f durch ein Trapez anzunähern und dessen Flächeninhalt zu berechnen. Man erhält dann $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$. Das erscheint jedoch zu ungenau und wir verfeinern: Ähnlich wie bei den Ober/Untersummen unterteilen wir das Intervall $[a,b]$ in n gleich lange Teilintervalle. Jedes hat Länge $h := \frac{b-a}{n}$ und das $k-$te Teilintervall ist dann gegeben durch $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ mit $x_k = a + k \cdot h$. In jedem dieser Teilintervalle approximieren wir f wie oben und erhalten als Näherung im $k-$ten Teilintervall $\int_{I_k} f(x)dx \approx h \cdot \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}$. Insgesamt folgt durch Summieren:

$$\int_a^b f(t)dt \approx T_h(f) = \sum_{k=1}^{n} h \cdot \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

(a) Skizziere obiges Vorgehen schematisch.

(b) Als Beispiel wollen wir das Integral $\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$ numerisch berechnen. Das macht auch Sinn, denn für die Stammfunktion gibt es keine geschlossene Formel. Schreibe ein Programm/Skript (zB in Java, Matlab, Excel, R, C++, Maple oder andere), welches als Eingaben die Werte a, b und n hat und den approximierten Wert für das Integral ausgibt.
Für die Werte $a = -6$ und $b = 1.5$ ist der tatsächliche Wert des Integrals 2.339167. Berechne den Fehler (also $\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt - T_h(f)$) für $n \in \{2, 3, \ldots, 14, 15\}$. Gib diese Fehler tabellarisch an und plotte diese gegen n. (Es ist ganz und gar nicht ratsam, diese Teilaufgabe händisch zu lösen)

(c) Da der wahre Wert des Integrals in der Praxis nicht bekannt ist, braucht man *Fehlerabschätzungen.* Dazu sei

$$E(h) = \int_a^b f(x)dx - T_h(f)$$

Zeige nun, dass $E(h) = \mathcal{O}(h^2)$ ist.
Anleitung: Bezeichne mit $M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|$. *Betrachte zunächst den Fehler in einem beliebigen Teilintervall* I_k*:*

$$E_k(h) = \int_{I_k} f(t)dt - \frac{h}{2}\big(f(x_{k-1}+h) + f(x_{k-1})\big).$$

Zeige $|E_k''(h)| \le \frac{h}{2}M_2$. *Benutze dies, um zu zeigen, dass* $|E_k(h)| \le M_2\frac{h^3}{12}$ *ist. Zeige schließlich damit, dass* $|E(h)| \le \frac{h^2(b-a)}{12}M_2$.

[1] (a) und (b) geben zusammen 5 Punkte, (c) gibt 6 Zusatzpunkte.