Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
27 Zusatzpunkte

Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 13 -

Abgabe: **Donnerstag, den 20.07.2017 um 12:10 im Hörsaal 22.**

Wichtige Bemerkung:

- Bitte zur Vorleistung anmelden. Diese ist mit 144 Übungspunkten bestanden.
- Bitte dringend (!) die im Forum veröffentlichten Informationen zu Klausur/Vorleistungsanmeldung beachten, damit keine Fristen verpasst werden.
- Stoff der ersten Klausur (09.08.2017) sind Blätter 1-12 (und entsprechend Vorlesungskapitel bis einschließlich Kap. 4, §3). Stoff der zweiten Klausur sind Blätter 1-13 und der gesamte Vorlesungsstoff.
- Dieses Blatt soll nur von denjenigen abgegeben werden, die davon ausgehen, dass ihnen Punkte zur Vorleistung fehlen.
- Die Übung zu diesem Blatt findet am **Donnerstag, den 20.07.2017 um 12:15 im Hörsaal 22** statt. Am **Freitag, den 21.07.2017 von 08:15 bis 10:00 im Hörsaal 22** biete ich eine Wiederholungs- und Fragestunde an.

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion von $\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-4x+3}$.

Aufgabe 2: (9 Punkte)
Bestimme, falls existent, folgende uneigentlichen Integrale.

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{k}{\mu}\left(\frac{x}{\mu}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^k}\,dx$
wobei $k>0$ und $\mu>0$ Konstanten sind.

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\mu x}\,dx$
wobei $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ eine Konstante ist.
Tipp: Fallunterscheidung.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Betrachte die Funktion $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=-3(x^2-1)$. Berechne das Volumen des Rotationskörpers der entsteht, wenn man f (im Intervall $[-1,1]$) um die $x-$Achse rotiert.
Bemerkung: Sieht übrigens in etwa aus wie ein Ufo.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir eine spezielle Funktion, die von enormer Wichtigkeit in vielen Bereichen der Mathematik, vor allem der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Sie ist gegeben durc $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Im Prinzip haben wir diese bereits in Aufgabe 5 des 11. Übungsblattes betrachtet, hier wurde das Integral approximiert. Tatsächlich gibt es keine geschlossene Formel für die Stammfunktion. Es darf im Folgenden stets benutzt werden, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\ dx = 1. \tag{1}$$

Das werden wir in Analysis IIa beweisen.

(a) Zeige durch Nachrechnen: $\int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)\ dx = 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi(x)\ dx = 1$.

(b) Betrachte nun $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\ dt$ aus der Vorlesung. Zeige durch geeignete Substitution und Benutzung von (1), dass $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$.
Tipp: $\phi(x) = \phi(-x)$.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe Toricellis Trompete. Diese entsteht durch Rotation der Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ um die $x-$Achse.

(a) Berechne das Volumen der Trompete im Bereich $[1, b]$ für ein $b > 1$.

(b) Berechne das (uneigentliche) Volumen der unendlich langen Trompete, also im Bereich $[1, \infty)$.

(c) Ähnlich wie man eine Formel für das Volumen eines Rotationskörpers herleitet kann man auch eine Formel für die *Mantelfläche* eines Rotationskörpers herleiten. Diese ist gegeben durch

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$$

(das braucht nicht gezeigt werden). Konvergiert die (uneigentliche) Mantelfäche der unendlich langen Trompete, also im Bereich $[1, \infty)$?

Bemerkung: Man hat also eine unendlich lange Trompete, welche endliches Volumen aber unendliche Mantelfäche hat. Um diese Trompete anzumalen, könnte man nun entweder unendlich viel Farbe benutzen, um sie von außen anzumalen oder aber sie von innen mit endlich viel Farbe befüllen :-)

Wir wünschen allen Teilnehmenden viel Erfolg bei den Prüfungen und alles Gute für die Zukunft.