Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
24+4 Punkte

Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 4 -

Abgabe: Freitag, den 19.5.2017 um 08:10 im Hörsaal **22**

Aufgabe 1: (8Punkte)

Im Folgenden ist jeweils das $n$te Folgenglied der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Berechne mithilfe der Grenzwertsätze den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so er existiert.

(a) $a_n := \dfrac{n^7 + 4n^2 - 1}{e^{0.1n}}$

(b) $a_n := \dfrac{(n-1)^3}{2n^4 + \pi n - 2}$

(c) $a_n := \dfrac{\binom{n}{2}}{n^2 + 1}$

(d) $a_n := \sum_{k=0}^{n} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k$

(e) $a_n := \sqrt{n^2 + n} - n$

(f) $a_n := \sqrt[n]{\dfrac{n}{e^n}}$

(g) $a_n := \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right)$

(h) $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^k}$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$.

(i) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k}$

Hinweise: Es dürfen alle Grenzwertsätze, Kriterien und Grenzwerte bekannter Folgen aus der Vorlesung benutzt werden. Es ist hier nicht notwendig, die Definition von Folgenkonvergenz zu benutzen. Für ausgewählte Folgen gibt es auf Seite 2 kleine Tipps, wie man vorgehen kann, falls man nicht weiterkommt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_0 := 0$ und $a_n := \sqrt{2 + a_{n-1}}$.

(a) Schreibe die ersten 3 Folgenglieder dieser Folge auf.

(b) Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Hinweis: Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist (jeweils Induktion) und benutze ein Kriterium aus der Vorlesung. Bestimme anschließend den Grenzwert.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Im Folgenden ist jeweils das $n$te Folgenglied der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Bestimme den Grenzwert der Folgen mithilfe der Grenzwertsätze und zeige die Konvergenz mithilfe der Definition, finde also zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein N, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

(a) $a_n := \dfrac{n}{2n+4}$

(b) $a_n := \dfrac{n^2}{n^2 + 2n + 1}$

(c) $a_n := \dfrac{2n^3 + 3n^2 - 8n}{3n^3 - 2n}$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeige oder wiederlege:

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, so ist der Grenzwert eindeutig.

(b) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, so sind sowohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(c) Es seien zwei nicht-negative Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben (nicht notwendigerweise konvergent). Wir betrachten die Folge der *arithmetischen* bzw. *geometrischen* Mittel $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$A_n := \frac{a_n + b_n}{2} \text{ bzw. } G_n := \sqrt{a_n b_n}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeige oder wiederlege:

(i) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(ii) Ist $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 5: (4 Zusatzpunkte)

Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (nicht notwendigerweise konvergente) Folge mit $0 \le a_n \le q - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten nun die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k q^{-k}$$

Zeige, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, dass also für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, sodass $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und für alle $p \in \mathbb{N}$.

Tipps zu Aufgabe 1:

(e): Als Bruch mit wurzelfreiem Zähler schreiben.

(g): Zunächst das $n$te Folgenglied umschreiben, sodass kein Produktzeichen vorkommt.

(h): Fallunterscheidung.

(i): Einschnürungssatz.