Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
0 Punkte

Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure
- Extrablatt -

keine Punkte, keine Abgabe. Lösung wird es online geben. Dieses Blatt dient als Vorbereitung für die Klausur, ist aber keine Probeklausur (dafür wäre es bei Weitem zu umfangreich). Die mit einem * gekennzeichneten Aufgaben sind relevant für die 2. Klausur, aber nicht für die 1. Klausur. Kein Anspruch auf Vollständigkeit, alle Blätter sind gleichermaßen relevant.

1. Zeige durch vollständige Induktion, dass für beliebige $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq a_i \leq 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, dass
$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

2. Zeige, dass für alle $n \geq 2$
$$\sqrt[n]{1 + 2n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$
gilt.
Tipp: Kann man direkt ohne Induktion zeigen. Betrachte die rechte Seite potenziert (also $(\dots)^n$) und wende die binomische Formel an.

3. (a) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Betragsungleichung $|x| \leq |x + 1|$ erfüllen.
   (b) Gib, falls existent, Maximum, Supremum, Minimum, Infimum der Menge $A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$ an.

4. Löse folgende Ausdrücke nach x.

   (a) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$
   (b) $\log_3 x + \log_3(x - 6) = 3$
   (c) $\ln(3x + 2) = 5$
   (d) $\ln(\sqrt{x}) - 2\ln(x) + 1 = 0$
   (e) $3^x \cdot 5^{-2x} = 7^{x+1}$
   (f) $e^x \cdot e^{3x} = 2$

5. Bestimme, falls existent, den Grenzwert folgender Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (hier braucht man nicht mit der Definition von Folgenkonvergenz arbeiten). Gib für nicht konvergente Folgen die Menge der Häufungswerte an.

   (a) $a_n := \dfrac{n^2 + 2n + 1}{cn^3 - n^2 + n - 1}$, $c \in \mathbb{R}$.
   (b) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$
   (c) $a_n := \dfrac{2}{\sqrt[n]{3n^2}}$
   (d) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k!}$
   (e) $a_n := \dfrac{n}{n-1} - \dfrac{2n}{n+1}$
   (f) $a_n := \dfrac{1}{((-1)^{n+1} - 2)^n}$

6. Betrachte die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$ und Startwert $a_0 = 0$.

   (a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $0 \leq a_n \leq 1$ und $a_n \leq a_{n+1}$.

   (b) Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert.

   (c) Bestimme den Grenzwert aus (b).

7. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n := \frac{-42-2n^2}{n^2+42n}$$
Bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>und</u> zeige die Konvergenz mithilfe der Definition der Folgenkonvergenz.
Bemerkung: Noch 7 weitere Aufgaben dieses Typs findet man auf Moodle unter Zusatzmaterial in der Datei "Folgenkonvergenz mit Definition".

8. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))}$

9. (a) Differenziere folgende Ausdrücke nach x. Die Ableitung braucht nicht vereinfacht werden. Man benenne jeweils zusätzlich die verwendete(n) Ableitungsregel(n).

   i. $\dfrac{x^2+2x}{x}$

   ii. $\ln(3x)$

   iii. $(\sin(x)+x^3+2)^3$

   iv. $e^{2x+1}\sin(x^2)$

   v. $x^{\sqrt[3]{x}}$

   vi. $\ln(\ln(\ln(x)))$

   (b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist der letzte Ausdruck (vi.) definiert?

10. (a) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ an einer Stelle $a > 0$.

    (b) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ an einer Stelle $a > 0$.
    Ist die Funktion f auch an der Stelle $a = 0$ differenzierbar? Zeige oder widerlege die Behauptung.

11. Bestimme Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} x^2+bx+c, & \text{falls } x \leq 0 \\ e^x, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$
eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion ist.

12. (a) Zeige, dass
$$\cos(x + x') = \cos(x)\cos(x') - \sin(x)\sin(x')$$
für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt. Benutze dazu die Funktion
$$g(x) = \cos(x)\cos(a - x) - \sin(x)\sin(a - x)$$
(b) Zeige mithilfe des Additionstheorems aus (a), dass $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ gilt. Zeige außerdem, dass $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

13. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass eine Konstante C existiert, sodass die Funktion $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x) + C$ positiv auf I ist.

14. Gegeben sei die Funktion $g(x) = x \ln x - x$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

    (a) Begründe, zunächst ohne Rechnung, wieso die Funktion g auf $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ ein (globales) Maximum und (globales) Minimum annimmt.

    (b) Bestimme dieses (glob.) Maximum und (glob.) Minimum.

    (c) Besitzt g auch auf dem Intervall $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ ein (glob.) Maximum und (glob.) Minimum?

15. Zeige, dass die Gleichung $e^x = \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}}$ *genau eine* Lösung zwischen 0 und 1 hat. Die Lösung braucht nicht berechnet werden.

16. Zeige, dass für alle $x \geq 0$ gilt, dass $\ln(1 + x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$.

17. Betrachte die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1 + x)$

    (a) Zeige, dass das dritte Taylorpolynom $P_3(x)$ von f mit Entwicklungspunkt $a = 0$ gegeben ist durch
$$P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$
    (b) Zeige für $|x| \leq \frac{1}{2}$ die Restgliedabschätzung $|R_3(x)| = |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4}$.

18. Wir definieren die Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ und } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
Zeige für $x \in \mathbb{R}$:

    (a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

    (b) $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und $\cosh'(x) = \sinh(x)$

(c) Zeige, dass cosh auf $[0, \infty)$ eine Umkehrfunktion, besitzt. Diesen nennen wir arccosh : $[1, \infty) \to [0, \infty)$.

(d) Bestimme die Ableitung des arccosh für $x \in (1, \infty)$.

(e) Zeige mit (d), dass $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

19. (a) Bestimme folgende unbestimmten Integrale:

i. $\displaystyle\int xe^{-x}\, dx$

ii. $\displaystyle\int 2^{x-1}\, dx$

iii. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}\, dx$

iv. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\, dx$

(b) * Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so dass $\displaystyle\int_1^a \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\, dx = 2\sqrt{7}$ gilt.

(c) Berechne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\, dx$.

20. Zeige oder widerlege:

(a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so ist auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(b) Das Produkt zweier divergenter Folgen ist divergent.

(c) Ist $a_n = o(c_n)$ und $b_n = o(c_n)$, so ist auch $a_n \cdot b_n = o(c_n)$.

(d) Es seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ beide positiv und es gelte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und g sei beschränkt, es existiere also eine Zahl $c > 0$ mit $g(x) < c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(e) Es sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Dann hat f im Intervall I eine Nullstelle.

(f) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Inverse f^{-1} streng monoton wachsend.

(g) * Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dann existiert (also konvergiert) das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$.