Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter
Universität Ulm

Übungsblatt 02

(Abgabe und Besprechung: Mittwoch 10. November 2010 um 8 Uhr c.t., O27/2203)

Aufgabe 6 *(Lineare Abhängigkeit)* (4 Punkte)

Gegeben sei ein Vektorraum V und ein System aus Vektoren $(v_j : j \in J)$, wobei J eine beliebige Indexmenge und $v_j \in V$ gilt. Zeige oder widerlege die folgende (Teil-)Behauptung:

$$(v_j : j \in J) \text{ beinhaltet einen Vektor } \tilde{v} \text{ zweimal} \Leftrightarrow (v_j : j \in J) \text{ ist linear abhängig.}$$

Aufgabe 7 *(Schnitt und Vereinigung von Unterräumen)* (3+2=5 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \mathcal{LH}\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ und $U_2 = \mathcal{LH}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\42\end{pmatrix}\right\}$.

(i) Begründe, warum $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum ist.

(ii) Zeige, dass $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum ist.

Aufgabe 8 *(Basis und Dimension)* (2+1+1+2+2+4=12 Punkte)

Wähle eine Basis aus folgenden Systemen von Vektoren und bestimme die Dimension des von diesen Basisvektoren erzeugten Unterraums.

(i) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix}\right)$, $(V = \mathbb{R}^4,\ \mathbb{K} = \mathbb{R})$

(ii) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}\right)$, $(V = \mathbb{R}^2,\ \mathbb{K} = \mathbb{R})$

(iii) $\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)$, $(V = \mathbb{R}^3,\ \mathbb{K} = \mathbb{R})$

(iv) $\left(\begin{pmatrix}1+i\\i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\-1-i\\i\end{pmatrix}\right)$, $(V = \mathbb{C}^3,\ \mathbb{K} = \mathbb{C})$

(v) $(1, t^2+1, t-4, 2t^2+3)$, $(V = \mathbb{R}[t],\ \mathbb{K} = \mathbb{R})$

(vi) $(1+i, (i-3)z^2+z^3, 3iz^2, -3z^2, (-2-6i)z^2+2iz^3)$, $(V = \mathbb{C}[z],\ \mathbb{K} = \mathbb{C})$

Aufgabe 9 *(Lineare Unabhängigkeit)* (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und (v, w, x) ein System von Vektoren in V. Zeige die folgende Aussage:

$$(v, w, x) \text{ ist linear unabhängig } \Rightarrow (v+w, w-v, v+x) \text{ ist linear unabhängig.}$$