Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter
Universität Ulm

Übungsblatt 3

(Abgabe und Besprechung: Mittwoch 24. November 2010 um 8 Uhr c.t., O27/2203)

"To be a good mathematician, or a good gambler, or good at anything, you have to be a good guesser"
- György Pólya (1887 - 1985), Mathematics and Plausible Reasoning

Aufgabe 10 *(Dimension und Basis)* (2 + 2 = 4 Punkte)

Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{C}^n$

(i) über dem Körper $\mathbb{R}$,

(ii) über dem Körper $\mathbb{C}$

und geben Sie eine Basis an.

Aufgabe 11 *(Skalarprodukt)* (4 Punkte)

Sei $V = (C([a,b]), \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass für $f, g \in V$

$$\langle f,\, g\rangle := \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$$

ein Skalarprodukt definiert.

Aufgabe 12 *(Orthogonalität)* (5 Punkte)

Es seien $\{a_k : k \geq 0\}, \{b_k : k \geq 1\} \subseteq C([0, 2\pi])$ mit

$$a_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_k(x) = \cos(kx) \quad \text{ und } \quad b_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto b_k(x) = \sin(kx)$$

bezüglich dem Skalarprodukt

$$\langle f,\, g\rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt.$$

Rechnen Sie **eine** der drei Eigenschaften nach

(i) $\langle a_k,\, a_j\rangle = \delta_{k,j}$ für $k, j \geq 1$ und $\langle a_0,\, a_j\rangle = 2\delta_{0,j}$ für $j \geq 0$,

(ii) $\langle a_k,\, b_j\rangle = 0$ für $k \geq 0, j \geq 1$,

(iii) $\langle b_k,\, b_j\rangle = \delta_{k,j}$ für $k, j \geq 1$.

Aufgabe 13 *(Äquivalenz von Normen)* (3+2+4* = 9 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}^n$.

(i) Sei n = 2. Zeichnen Sie die folgende Menge

$$M_p := \{x \in V : ||x||_p = 1\}$$

für $p = 1, 2, \infty$.

(ii) Zeigen Sie folgende Ungleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)

(iii) Es gilt die Hölderungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{für } p,q \in (1,\infty) : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Zeigen Sie nun mit Hilfe der Hölderungleichung für $p, q \in (1, \infty)$ die allgemeineren Ungleichungen

$$\alpha ||x||_p \leq ||x||_q \leq \beta ||x||_p$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten α, β.

(Bemerkung: Das hier gezeigte Resultat lässt sich analog für $p, q \in \{1, \infty\}$ zeigen und beschreibt die Äquivalenz von beliebigen Normen in endlich-dimensionalen Räumen, in ∞-dimensionalen Räumen gilt das im Allgemeinen nicht.)

Aufgabe 14 *(Normgleichungen)* (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei V ein innerer Produktraum und sei

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad x \in V$$

die induzierte Norm.

(i) Zeigen Sie, dass für $x, y \in V : x \perp y$ der Satz von Pythagoras gilt, d. h.

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für $x, y \in V$ die Parallelogrammgleichchung gilt, d.h.

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Aufgabe 15 *(Anwendung von Pythagoras und Orthogonalität)* (3 Punkte)

Sei $V = C([0, 2\pi])$ ein innerer Produktraum mit

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt.$$

Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} (\sin(kx) + \cos(jx))^2 dx \quad \text{für } k, j \geq 1.$$

Aufgabe 16 *(Beste Approximation)* (4 Punkte)

Sei V ein innerer Produktraum und sei

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad x \in V$$

die induzierte Norm. Ferner sei $U := \mathcal{LH}\{u_1, \ldots, u_n\}$ mit $u_i \in V \backslash \{0\}$ für $i = 1 \ldots n$. Für ein $v \in V$ und $u_0 \in U$ gelte

$$\langle v - u_0, u_i \rangle = 0 \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Zeigen Sie, dass u_0 die beste Approximation von V in den Unterraum U ist, d.h. es gilt

$$||v - u_0|| = \min\{||v - u|| \ : \ u \in U\}.$$

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\langle v - u_0, u \rangle = 0$ für $u \in U$ gilt und damit, dass $||v - u||^2 = ||v - u_0||^2 + ||u_0 - u||^2$ für $u \in U$ gilt.)

Aufgabe 17 *(Orthogonale Projektion)* (3 Punkte)

Sei V ein innerer Produktraum und $(u_1, \ldots, u_n)$ ein Orthogonalsystem, also

$$\langle u_i,\, u_j\rangle = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Dann heißt für $v \in V$

$$u_0 := \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u_i,\, v\rangle}{\langle u_i,\, u_i\rangle} u_i$$

die *orthogonale Projektion* von v in den von $(u_1, \ldots, u_n)$ aufgespannten Unterraum.
Zeigen Sie, dass u_0 die Voraussetzungen von Aufgabe 17 erfüllt, d.h. zeigen Sie, dass gilt

$$v - u_0 \perp u_k \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

(Bemerkung: Sofern U endlich-dimensional ist, stimmen also beste Approximation und orthogonale Projektion überein.)

Aufgabe 18 *(Orthogonale Projektion)* (2 + 2 = 4 Punkte)

(i) Sei $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$ und $U := \mathcal{LH}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Berechnen Sie die orthogonale Projektion u_0 von v in U bzgl. $\langle x,\, y\rangle := x^T y$.

(ii) Sei $f \in C([0, 2\pi])$, $U := \mathcal{LH}\{a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ und a_k, b_k wie in Aufgabe 12 und

$$\langle f,\, g\rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt.$$

Geben Sie eine Formel zur Berechnung der orthogonalen Projektion $\tilde{f}$ von f in den Unterraum U an.

Aufgabe 19 *(Gram-Schmidtsch Orthogonalisierungsverfahren)* (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ ein System linear unabhängiger Vektoren. Dann definiert man iterativ

$$y_1 := x_1$$

und für $k = 2, \ldots, n$

$$y_k := x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle y_i,\, x_k\rangle}{\langle y_i,\, y_i\rangle} y_i.$$

Dann ist das entstehende System $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Orthogonalsystem.

(i) Orthogonalisieren Sie $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ bzgl. $\langle x,\, y\rangle := x^T y$,

(ii) Orthogonalisieren Sie $(1\ ,\ t\ ,\ t^2 + t + 1)$ bzgl. $\langle f,\, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.