Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter
Universität Ulm

Übungsblatt 5

(Abgabe und Besprechung: Mittwoch 22. Dezember 2010 um 8 Uhr c.t., O27/2203)

"The essence of mathematics is not to make simple things complicated, but to make complicated things simple."
- *Stanley Gudder, Professor at the University of Denver.*

Aufgabe 27 *(Lineare Gleichungssysteme)* (3+2+1+1+1=8 Punkte)

Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =: \operatorname{diag}(2, 1, -1, 2, 2, 4)$$

gegeben.

(i) Die Inverse einer regulären Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich mit Hilfe des Gauß Algorithmus bestimmen. Dazu führt man solange elementare Umformungen auf die erweiterte Matrix $(R \mid I_n)$ durch, wobei $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix ist, bis man zu einer Form der Gestalt $(I_n \mid S)$ kommt. Dann ist $S = R^{-1}$, d.h.

$$(R \mid I_n) \rightsquigarrow (I_n \mid R^{-1}).$$

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Methode die Inverse von A.

(ii) Lösen Sie mit Hilfe von A^{-1} das lineare Gleichungssystem $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Bx = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(iv) Bestimmen Sie für eine allgemeine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $d_i \neq 0$ für $i = 1 \ldots n$ die Inverse.

(v) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Cx = \begin{pmatrix} 42 \\ -4 \\ -3 \\ 10 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$

Aufgabe 28 *(Determinanten)* (3+2=5 Punkte)

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass gilt

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\det\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad \det\left(\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 29 *(Cramersche Regel)* (2+3+1=6 Punkte)

(i) Es seien

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 8 & 4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Cramerschen Regel.

(ii) Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und $b \in \mathbb{R}^5$ gegeben. Bestimmen Sie die Anzahl der FLOPS für das Lösen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mittels Cramerscher Regel. Verwenden Sie für die Methode der Determinantenbestimmung den Laplachen Entwicklungssatz. Dabei dürfen Sie annehmen, dass die Bestimmung von $(-1)^{j+k}$ keine Rechenoperation benötigt.

(iii) Der Aufwand für das Lösen eines linearen Gleichungssystem per Cramersche Regel beträgt $\sim (n^2 \cdot n!)$ FLOPS (vgl. [M.Herrmann, Numerische Mathematik]). Der derzeit beste Supercomputer **Tianhe-1A** in China (Stand 12/2010) rechnet mit etwa 2,5 PetaFLOPS, d.h. $\sim 2,5 \cdot 10^{15}$ FLOPS. Berechnen Sie die Zeit [in Jahren], wie lange dieser Supercomputer benötigt, um ein lineares Gleichungssystem der Dimension $n = 30$ mittels Cramerschen Regel zu lösen.

Aufgabe 30 *(Numerische Problematik)* (2+3=5 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix}1044,005 & 696\\ 174 & 116\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix}696\\ 116\end{pmatrix}.$$

(i) Lösen Sie das lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mittels Gauß Algorithmus.

(ii) Nun betrachtet man den Fall, dass z.B. durch Messfehler bedingt, kleine Störungen die Daten verfälscht. Das heißt

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}1044,0045 & 696,0028\\ 174,0008 & 116,0005\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix}696,0034\\ 116,006\end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `solveEx30ii.m`, dass das Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{b}$ löst und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 31 *(Matlabaufgaben)* (2+2+4=8 Punkte)

(i) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `matrixProducts.m`, dass die Matrixprodukte aus Aufgabe 22 berechnet.

(ii) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `solveEx23i.m`, dass das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 23 (i) löst.

(iii) Implementieren Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren für Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, d.h. schreiben Sie eine Funktion `Y = gramSchmidt(X)` die eine Matrix aus den zu orthogonalisierenden Vektoren übergeben bekommt und ebenfalls eine Matrix aus orthogonalisierten Vektoren zurück liefert.

Drucken Sie die Skripte, sowie die Ausgabe aus. (Tipp: Verwenden Sie zur Aufzeichnung der Konsolenaktivität den Befehl `diary`).
