Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter
Universität Ulm



# Übungsblatt 6

(Abgabe und Besprechung: Mittwoch 19. Januar 2011 um 8 Uhr c.t., O27/2203)

"The study of mathematics, like the Nile, begins in minuteness but ends in magnificence."
*- Charles Caleb Colton, english sportsman and writer, 1780-1832.*

**Aufgabe 32** *(LR-Zerlegung)* (3+2+5=10 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von $A$.

(ii) Lösen Sie mit Hilfe dieser LR-Zerlegung durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen das LGS $Ax = b$ mit $b = (-1, 2, -1, 1)^T$. Das heißt, lösen Sie

  (a) $Lz = b$

  (b) $Rx = z$.

(iii) Implementieren Sie in Matlab eine Funktion zur Berechnung der LR-Zerlegung für quadratische, reguläre Matrizen, d.h. schreiben Sie eine Funktion `[L,R] = lr(A)`, die als Rückgabewerte die Matrizen $L$ und $R$ hat.

**Aufgabe 33** *(Eigenwerte und Eigenvektoren)* (2+2+2=6 Punkte)

Es seien die Matizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie von jeder Matrix die Eigenwerte, die Dimension der Eigenräume sowie eine Basis der Eigenräume.

**Aufgabe 34** *(Hauptachsentransformation)* (1+2+1=4 Punkte)

Es sei die Gleichung für einen Kegelschnitt

$$q(x, y) := 2x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$$

gegeben.

(i) Geben Sie die zugehörige quadratische Form an.

(ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen (normierten!) Eigenvektoren.

(iii) Erklären Sie anschaulich, was bei der Hauptachsentransformation passiert. Insbesondere, welche Funktion die Eigenvektoren haben.

**Aufgabe 35** *(Definitheit)* (5 Punkte)

Überprüfen Sie folgende Matrizen auf Definitheit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 36** *(Fibonacci-Zahlen)* (1+3+1 = 5 Punkte)

Die nach Leonardo da Pisa, auch bekannt unter dem Namen Fibonacci, benannte unendliche Zahlenfolge kommt vielfältig in der Natur vor. Sie wird rekursiv definiert durch

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

mit den Startwerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$. Die rekursive Berechnung kann für große $k$ recht aufwändig sein. In dieser Aufgabe soll eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen hergeleitet werden, sodass man den rekursiven Berechnungsaufwand vermeidet.

(i) Schreibe Sie (1) als Matrix-Vektor-Produkt. Also bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass gilt

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$$

(ii) Bestimmen Sie eine explizite Formel für $F_{k+1}$.

(iii) Berechnen Sie $F_{100}$.

**Das HM3-Team wünscht Ihnen frohe Weihnachten,**
**erholsame Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2011.**