Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter
Universität Ulm

Übungsblatt 7

(Abgabe und Besprechung: Mittwoch 02. Februar 2011 um 8 Uhr c.t., O27/2203)

"If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is. " - *John von Neumann, American mathematician, 1903-1957.*

Aufgabe 37 *(Differentialgleichungssystem)* (3 Punkte)

Bestimmen Sie drei linear unabhängige Lösungsvektoren für das folgende System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 4x_1(t) + 2x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t) + x_3(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 38 *(EM 2012)* (5 Punkte)

Im Endspiel am 01.07.2012 der Fußball-Europameisterschaft 2012 stehen sich erneut Spanien und Deutschland im Finale gegenüber. Nach 92 Minuten und einem spannenden Spiel steht es noch unentschieden. Der letzen Angriff von Thomas Müller wurde von Carles Puyol durch ein taktisches Foul gestoppt. Lukas Podolski tritt zum finalen Freistoß an und da er ein begabter Mathematiker ist, berechnet er die Flugbahn des Balles wie folgt

$$B : [0, 2] \to \mathbb{R}^3,\ B(t) = \begin{pmatrix} 10t \\ t^2 \\ -2.5t^2 + 4t \end{pmatrix}.$$

Nach dieser Flugbahn landet der Ball genau im rechten Kreuzeck. Allerdings ist Podolski sich nicht sicher, ob der spanische Torwart Iker Casillas den Ball rechtzeitig erreicht. Er nimmt an, dass Casillas eine Sekunde benötigt, um seine Hand ins rechte Kreuzeck zu stecken. Zudem tritt Podolski den Ball mit 108 km/h. Der Freistoß ist die letzte Aktion des Spiels. Wird Deutschland Europameister?
(Hinweis: Zur Lösung dürfen Sie Formeln für $\int \sqrt{ax^2 + bc + c}dx$ benutzen, siehe z.B. Bronstein.)

Aufgabe 39 *(Parametrisierte Kurven)* (1+3=4 Punkte)

Es sei folgende parametrisierte Kurve gegeben

$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie die Kurve für $r = 1$.

(ii) Bestimmen Sie die Länge $\ell(\gamma)$ der Kurve.

Aufgabe 40 *(Kurven in MATLAB)* (4 Punkte)

Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `lovelyGift.m`, welches folgende Kurve, die in Polarkoordinaten gegeben ist, in karthesischen Koordinaten plotten lässt

$$h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ h(\varphi) = 2 - \sin\varphi + \frac{\sin\varphi\sqrt{|\cos\varphi|}}{\sin\varphi + 1.4}.$$

Aufgabe 40 *(Mehrfachintegrale)* (3+3+3=9 Punkte)

Berechnen Sie jeweils $\int_M f$ für

(i) $M = [1,2] \times [0,1] \times [0,2]$, $f(x,y,z) = \frac{2z}{(x+y)^2}$

(ii) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1 \right\}$, $f(x,y) = 6x \cos y^3$

(iii) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\ ,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0 \right\}$, $f(x,y,z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{3}}$

(Hinweis: Verwenden Sie bei (iii) die verallgemeinerten Kugelkoordinanten $x = ar \sin\varphi \cos\psi$, $y = br \sin\varphi \sin\psi$ und $z = cr \cos\varphi$)

Aufgabe 41 *(Volumina)* (4+4=8 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der folgenden Körper

(i) Vivianischen Körper $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ x^2 + y^2 \le rx \right\}$, wobei $r > 0$ fest.

(ii) Torus $T = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \sigma \sin\varphi) \cos\psi \\ (R + \sigma \sin\varphi) \sin\psi \\ \sigma \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le \sigma \le r,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \psi \le 2\pi \right\}$, wobei $0 \le r \le R$ fest.