Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter
Universität Ulm

Übungsblatt 9

(Besprechung: Mittwoch 16. Februar 2011 um 8 Uhr c.t., O27/2203)

"Do not worry about your problems with mathematics, I assure you mine are far greater."
- Albert Einstein (1879 - 1955)

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob folgende Mengen U Untervektorräume des Vektorraumes V über dem Körper K sind.

(i) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ und $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{2}(x+2) = \frac{1}{4}y + 1 \right\}$

(ii) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ und $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0 \right\}$

(iii) $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$ und $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$

Aufgabe 2

Es sei

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}, \ R > 0 \text{ fest.}$$

(i) Berechnen Sie $|K|$.

(ii) Berechnen Sie den Schwerpunkt von K.

Aufgabe 3

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie $\det A$.

(ii) Überprüfen Sie, ob die Spalten von A ein linear unabhängiges System bilden.

Aufgabe 4

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die zugehörigen Eigenvektoren von A.

(ii) Berechnen Sie B^n für $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Überprüfen Sie die Matrix C auf ihre Definitheit.

Aufgabe 5

Es sei $V = C([0, 2\pi])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,\, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

versehen und $U = \operatorname{span}\{1, \cos(t), \cos(2t), \sin(t), \sin(2t)\}$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\tilde{f}(t)$ von

$$f(t) = t - 1$$

in den Unterraum U.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie drei linear unabhängige Lösungsvektoren für folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + x_2 + 3x_3\\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) + 2x_2 + 3x_3\\
\dot{x}_3(t) &= x_1(t) + 3x_2 + 2x_3.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & t \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5\\ 1\\ 3t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Berechnen Sie jeweils $\int_M f$.

(i) $M = [-1, 1]^2 \setminus (\,(0, 1] \times [-1, 0)\,)$, $f(x, y, z) = e^x y + xy$.

(ii) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.