

Blatt 7

Abgabe: Fr, 10.12.2010 vor der Übung.

Aufgabe 7.1: Elementares Rechnen in \mathbb{C} (2+2)

Berechnen Sie $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ für

$$\text{a) } z := (1 + 2i)(3 - 5i), \quad \text{b) } z := \frac{1 + i}{1 + 2i}.$$

Aufgabe 7.2: Einheitswurzeln (1+2+2)

- (a) Bestimmen Sie alle achten Einheitswurzeln in \mathbb{C} in der Darstellung mit Real- und Imaginärteil.
(b) Bezeichnen $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1} \in \mathbb{C}$ die n -ten Einheitswurzeln. Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = 0.$$

- (c) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem für die DGL $x^{(8)} - x = 0$.

Aufgabe 7.3: Gaußsche Ebene I (je 1,5)

Skizzieren Sie die Menge folgender Zahlen $z \in \mathbb{C}$ in der Gaußschen Ebene:

- (a) $1 < |z - i| < 3$,
(b) $|\frac{z-i}{z-1}| = 1$,
(c) $|z - 1| + |z + 1| \leq 4$.

Argumentieren Sie dabei (geometrisch oder rechnerisch), dass die Skizze die jeweilige Menge beschreibt.

Aufgabe 7.4: Funktionen auf der Gaußschen Ebene (3,5)

Sei die Menge $M := \{re^{i\varphi} : 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$ gegeben. Skizzieren Sie M und das Bild $f(M)$ unter folgenden Funktionen:

- b) $f(z) := iz$, e) $f(z) := z^8$,
c) $f(z) := (1 + i)z$, f) $f(z) := z^{-1}$,
d) $f(z) := z^2$, g) $f(z) := \sqrt{z}$ (Hauptwert).

Aufgabe 7.5: Gaußsche Ebene II (3)

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass z_1, z_2, z_3 genau dann auf einer Geraden in der Gaußschen Ebene liegen, wenn gilt

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}.$$