

## Blatt 7

Abgabe: Fr, 10.12.2010 vor der Übung.

### Aufgabe 7.1: Elementares Rechnen in $\mathbb{C}$ (2+2)

Berechnen Sie  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $|z|$ ,  $\operatorname{Arg} z$  für

$$\text{a) } z := (1 + 2i)(3 - 5i), \quad \text{b) } z := \frac{1 + i}{1 + 2i}.$$

### Aufgabe 7.2: Einheitswurzeln (1+2+2)

- (a) Bestimmen Sie alle achten Einheitswurzeln in  $\mathbb{C}$  in der Darstellung mit Real- und Imaginärteil.  
(b) Bezeichnen  $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1} \in \mathbb{C}$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln. Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = 0.$$

- (c) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem für die DGL  $x^{(8)} - x = 0$ .

### Aufgabe 7.3: Gaußsche Ebene I (je 1,5)

Skizzieren Sie die Menge folgender Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  in der Gaußschen Ebene:

- (a)  $1 < |z - i| < 3$ ,  
(b)  $|\frac{z-i}{z-1}| = 1$ ,  
(c)  $|z - 1| + |z + 1| \leq 4$ .

Argumentieren Sie dabei (geometrisch oder rechnerisch), dass die Skizze die jeweilige Menge beschreibt.

### Aufgabe 7.4: Funktionen auf der Gaußschen Ebene (3,5)

Sei die Menge  $M := \{re^{i\varphi} : 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$  gegeben. Skizzieren Sie  $M$  und das Bild  $f(M)$  unter folgenden Funktionen:

- b)  $f(z) := iz$ ,                      e)  $f(z) := z^8$ ,  
c)  $f(z) := (1 + i)z$ ,                f)  $f(z) := z^{-1}$ ,  
d)  $f(z) := z^2$ ,                        g)  $f(z) := \sqrt{z}$  (Hauptwert).

### Aufgabe 7.5: Gaußsche Ebene II (3)

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass  $z_1, z_2, z_3$  genau dann auf einer Geraden in der Gaußschen Ebene liegen, wenn gilt

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}.$$