Blatt 9

Abgabe: Mo., 10.01.2011 vor der Vorlesung.

Aufgabe 9.1: Holomorphe Funktionen I (2)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie: Aus $\operatorname{Re} f(z) \equiv c$ konstant folgt, dass f lokal konstant ist.

Aufgabe 9.2: Holomorphe Funktionen II (2+2+2)

Bestimmen Sie, falls möglich, jeweils eine holomorphe Funktion $f(z) = f(x + iy)$

(a) mit $\operatorname{Re} f(z) = 3x^2y - y^3$,

(b) mit $\operatorname{Re} f(z) = \arctan \frac{x}{y}$ auf $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 0\}$,

(c) mit $\operatorname{Re} f(z) = \log(x^2 + y^2)$ auf $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 9.3: Ableitung der Umkehrfunktion (1+1+1)

Berechnen Sie die Ableitung des Hauptzweiges des Arkussinus (vgl. Aufg. 8.2)

(a) mittels der Darstellung $\arcsin(z) = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$ aus Aufgabe 8.2e,

(b) als Ableitung der Umkehrfunktion von $\sin(z)$,

(c) und zeigen deren Gleichheit.

Aufgabe 9.4: Kurvenintegrale (3+3)

Berechnen Sie für die Funktionen $f(z) = z^2$, $f(z) = |z|^2$ und $f(z) = \operatorname{Log}(z)$ jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

Dabei sei γ folgende Kurve:

(a) die Strecke mit Anfangspunkt 2 und Endpunkt $2i$,

(b) der Teilbogen des Ursprungskreises, der im 1. Quadranten von 2 nach $2i$ verläuft.

Aufgabe 9.5: Konforme Abbildungen (1+1+1)

Sei die Funktion $f(z) = \overline{z}$ gegeben.

(a) Gibt es eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}$, so dass $f(z)$ dort eine Stammfunktion besitzt? *(Hinweis: Integriere $f(z)$ längs Kreisen.)*

(b) Wo ist $f(z)$ holomorph?

(c) Ist $f(z)$ lokal konform oder winkeltreu oder orientierbar? Begründen Sie.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2011!