Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker Blatt 12

28.01.2011

1. Bestimmen Sie die Art der Singularität folgender Funktionen an den angegebenen Stellen z_0 :

   (a) $f(z) = \sin\frac{1}{1-z}, \quad z_0 = 1$ (b) $f(z) = \frac{1}{1 - exp(z)} \quad z_0 = 2\pi i$

   (c) $f(z) = \frac{1}{\sin z - \cos z}, \quad z_0 = \frac{\pi}{4}$ (d) $f(z) = \Gamma(z), \quad z_0 = -n, n \in \mathbb{N}_0$

2. Im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ habe die Funktion $f(z)$ eine Nullstelle m-ter Ordnung und die Funktion $g(z)$ einen Pol n-ter Ordnung. Bestimmen Sie, was z_0 für die Funktionen $f(z) + g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ bzw. $\frac{f(z)}{g(z)}$ ist.

3. Bestimmen Sie die Art der Singularität folgender Funktionen bei $z_0 = 0$ und entwickeln Sie diese in eine Laurentreihe:

   (a) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ (b) $f(z) = \cos\frac{1}{z^2}$ (c) $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z^2}$

4. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{z-1}{z(z-i)}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ (b) $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 1\}$ (c) $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

5. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale:

   (a) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^2}\, dz$ (b) $\oint\limits_{|z|=1} \cos\frac{1}{z^2}\, dz$ (c) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3}{1-\cos(z^2)}\, dz$

   (d) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z-1}{z(z-i)}\, dz$ (e) $\oint\limits_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{z-1}{z(z-i)}\, dz$ (f) $\oint\limits_{|z-i|=5} \frac{z-1}{z(z-i)}\, dz$

   (g) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\exp(2z)}{z^2+z}\, dz$ (h) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{\cos z}\, dz$ (i) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \Gamma(z)\, dz$

6. Gegeben sei eine Funktion $f(z)$. Bestimmen Sie jeweils das Residuum von der logarithmischen Ableitung $\frac{f'(z)}{f(z)}$ an der Stelle z_0 unter der Voraussetzung

   (a) $f(z)$ ist bei z_0 holomorph und z_0 ist Nullstelle m-ter Ordnung

   (b) $f(z)$ ist in einer punktierten Umgebung von z_0 holomorph und z_0 ist ein Pol n-ter Ordnung.