Blatt 4

Abgabe: Fr, 19.11.2010 vor der Übung.
Bitte zu zweit abgeben!

Aufgabe 4.1: Exakte DGL (1+3+2+2)

Gegeben die folgende Differentialgleichung:

$$(2x^3 + 5t^2x)\dot{x} + 5tx^2 - 48t^3 = 0. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie durch Bestätigen der Integrabilitätsbedingung, dass die DGL (1) exakt ist.

(b) Geben Sie die allgemeine implizite Lösung der DGL an.

(c) Geben Sie alle Lösungen $x : D \to \mathbb{R}$ der DGL (1) mit $x(0) = 0$ zusammen mit deren maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ an.

(d) Begründen Sie, warum die Existenz mehrerer Lösungen für das Anfangswertproblem aus (c) nicht im Widerspruch zum Eindeutigkeitssatz steht.

Aufgabe 4.2: Lösungsraum (2+2)

Für Funktionen $A : I \to \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{2}$$

eine lineare Differentialgleichung. Bezeichne

$$\mathcal{L} = \{x : I \to \mathbb{R} \colon\ \dot{x} = A(t)x + f(t)\},$$
$$\mathcal{L}_{\text{hom}} = \{x : I \to \mathbb{R} \colon\ \dot{x} = A(t)x\}$$

den Lösungsraum von (2) bzw. den Lösungsraum der zugehörigen homogenen DGL.

(a) Zeigen Sie: Falls $x_p \in \mathcal{L}$ und $x_h \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$ gilt, dann ist die Summe $x_p + x_h$ eine Lösung von (2).

(b) Zeigen Sie: Falls $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ zwei Lösungen von (2) sind, dann ist die Differenz $x_1 - x_2$ eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL, d. h. $x_1 - x_2 \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$.

Aufgabe 4.3: Satz von Picard-Lindelöf (4)

Gegeben das AWP $\dot{x} = t^2x$ mit $x(0) = 1$. Berechnen Sie eine geschlossene Formel für x_n in der Picard-Lindelöf-Iteration für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, dass die Funktionenfolge (x_n) gleichmäßig gegen eine Lösung des AWP konvergiert.

Aufgabe 4.4: Integrierender Faktor (4)

Gegeben sei das AWP

$$2x + (xt^{-1} + t)\dot{x} = 0, \qquad x(0) = 1.$$

Finden Sie einen integrierenden Faktor und lösen Sie das AWP.