Blatt 5

Abgabe: Fr, 26.11.2010 vor der Übung.

Aufgabe 5.1: Lipschitz-Bedingungen (2+3)

(a) Zeigen Sie, dass $f(t,x) = \log(1+e^{tx})$ auf $[0,1) \times \mathbb{R}$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass $f(t,x) = \sqrt{tx}$ auf $(0,1) \times (0,\infty)$ <u>keine</u> Lipschitz-Bedingung erfüllt.

Aufgabe 5.2: Matrix-Exponentialfunktion (3+2)

(a) Sei ein Jordankästchen $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ der Größe n zum Eigenwert 0 gegeben, d.h., sei

$$J := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 0 \; \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

Berechnen Sie J^k für $k \in \mathbb{N}$ und die Matrix e^J.

(b) Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Was sind die Diagonalelemente der Matrix e^A?

Aufgabe 5.3: Lineare homomogene Systeme I (4+4)

Berechnen Sie jeweils ein Fundamentalsystem für folgende DGLS:

(a)
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t) \\ \dot{z}(t) = y(t) + z(t), \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2tx(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 2y(t). \end{cases}$$

(Hinweis: Das Integral $\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$ wird Gaußsche Fehlerfunktion genannt.)

Aufgabe 5.4: Lineare homomogene Systeme II (2)

Sei

$$X(t) := \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} & 2e^t \\ 0 & 0 & e^t \\ 0 & -4e^{5t} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gibt es ein lineares homogenes DGLS für welches $X(t)$ ein Fundamentalsystem ist? Falls ja, berechnen Sie die Koeffizientenmatrix.