



Analysis II - Übungsblatt 1

(Abgabe: Mittwoch, 26. Oktober 2011 vor der Übung.)

”Die Phantasie arbeitet in einem schöpferischen Mathematiker nicht weniger als in einem erfinderischen Dichter.”

- Jean-Baptiste le Rond d’Alembert, 1717-1773, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph.

Aufgabe 1 (Ableitung der Umkehrfunktion)

(10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{-3x} + 7 \cos(6x) - 50x + 34.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und bestimmen Sie

$$(f^{-1})'(42).$$

Aufgabe 2 (L’Hospital)

(2+2+2+2=8 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, folgende Grenzwerte

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + e^{2x})}{x} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(2x) - 2x}{\sinh(3x) - 3x} \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

Aufgabe 3 (Lokale Extrema)

(10 Punkte)

Es sei $f \in C_{n+1}([a, b])$ und $c \in (a, b)$ mit der Eigenschaft $f'(c) = f^{(2)}(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$. Ferner gelte $f^{(n+1)}(c) \neq 0$. Beweisen Sie unter diesen Voraussetzung folgende Aussagen

- (i) Wenn n ungerade, so ist hat die Funktion f im Falle $f^{(n+1)}(c) > 0$ bei c ein lokales Minimum und im Falle $f^{(n+1)}(c) < 0$ ein lokales Maximum.
- (ii) Wenn n gerade, so liegt bei c kein lokales Extremum vor.

Aufgabe 4 (Taylorentwicklung)

((3+3+3)+3=12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $f^{(k)}(x)$ für $k \in \mathbb{N}$ und das n -te Taylorpolynom $P_n(x)$ für

- (i) $f(x) = \cos x$ um $a = 0$
- (ii) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um $a = 0$
- (iii) $f(x) = e^x$ um $a = 1$.

Gilt jeweils $R_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$?

(b) Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$, sodass $R_n(x) < 10^{-4}$ für $x = 0.2$, wobei $R_n(x)$ das n -te Restglied der Taylorentwicklung von $\cos(x)$ um Entwicklungspunkt $a = 0$ ist. Wie groß müsste man n wählen, damit auch $R_n(2) < 10^{-4}$ gilt?

Mehr Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden Sie auf

<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws11/ana2.html>
