Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 3

(Abgabe: Mittwoch, 08. November 2011 vor der Übung.)

"Das Denken gehört zu den größten Vergnügungen der menschlichen Rasse."
- Bertolt Brecht, 1898-1956, deutscher Dramatiker und Lyriker.

Aufgabe 10 *(Unbestimmte Integrale)* (je 1 außer (k)+2=15 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{3\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-6x+10}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+3)^2}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx$ (j) $\displaystyle\int be^{-ax}\,dx$ (k) $\displaystyle\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$ (l) $\displaystyle\int \frac{3}{x^3-x}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-2x^2+x-2}\,dx$

Aufgabe 11 *(Bestimmte Integrale)* (1+1+1+1+1+1=6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} 2x(x^2-3)^5\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+3x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\log x}{x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-x^2}x^{42}}{2x^7-5x^3-x}\,dy$

Aufgabe 12 *(Irrationalität von π)* (6+4=10 Punkte)

Es sei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$J_n(x) := \frac{x^{2n+1}}{n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\cos(xt)\,dt.$$

(a) Beweisen Sie die Drei-Term-Rekursion

$$J_n(x) = (4n-2)J_{n-1}(x) - 4x^2 J_{n-2}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, n \geq 2.$$

(b) Zeigen Sie, dass π irrational ist.
Hinweis: Benutzen Sie Teilaufgabe (a) wie folgt: Es gibt Polynome $P_n(x)$, $Q_n(x)$ vom Grad $\leq n$ mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass $J_n(x) = P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x$ gilt. Setzen Sie danach $x = \frac{\pi}{2}$ ein.

Aufgabe 13 *(Geometrische Interpretation des Areacosinus Hyperbolicus)* (9 Punkte)

Der Flächeninhalt F, der von den Geraden und der Hyperbel in Abbildung 1 eingeschlossen wird, soll berechnet werden. Die Schnittpunkte seien jeweils an der Stelle $x = c$, wobei $c \in [1, \infty)$. Die Hyperbel ist gegeben durch die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$. Zeigen Sie

$$F = \operatorname{Arcosh} c.$$

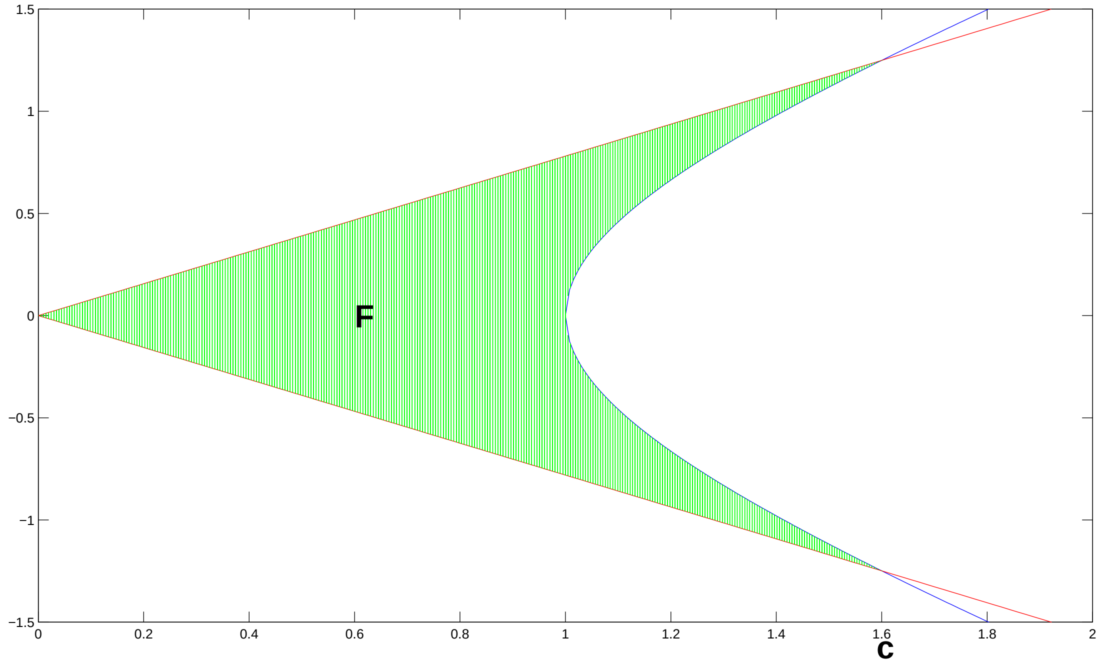

Abbildung 1: Geometrische Interpretation des Areacosinus Hyperbolicus für $c = 1.6$.