Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 4

(Abgabe: Mittwoch, 16. November 2011 vor der Übung.)

"Von allen wahrhaften Wissenschaften sind, wie Aristoteles und Averroes behaupten, die mathematischen Wissenschaften die wahrhaftesten und stehen in der Unbestreitbarkeit an erster Stelle vor den Naturwissenschaften."
- Luca Pacioli, ~1445-1514, italienischer Mathematiker.

Aufgabe 14 *(Zwischensumme)* (15 Punkte)

Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n-\vartheta} = \log 2 \qquad \forall\, 0 < \vartheta < 1.$$

Aufgabe 15 *(Uneigentliche Integrale)* (5+5+5=15 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren oder divergieren

(a) $\displaystyle\int_0^1 \log t \, dt$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t}\, dt.$

Aufgabe 16 *(Umschlagpunkt für die Konvergenz bei uneigentlichen Integralen)* (6+4+10*=10+10* Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

konvergent ist, für $\alpha > 0$ und absolut konvergent genau dann, wenn $\alpha > 1$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\, dx \qquad \text{divergiert und} \qquad \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\, dx \qquad \text{konvergiert.}$$

Hinweis: Wie verhält sich $\sin x$ *bei* $x = 0$*?*

(c) * Ermitteln und begründen Sie, für welche $\alpha > 0$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

konvergiert.

Mehr Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden Sie auf

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws11/ana2.html`